



Title	リーマン面に関連する位相幾何学 予稿集
Author(s)	河澄, 響矢
Citation	Hokkaido University technical report series in mathematics, 54, 1
Issue Date	1998-01-01
DOI	10.14943/747
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/749 ; http://eprints3.math.sci.hokudai.ac.jp/1231/
Type	bulletin (article)
Note	1998年9月14日～9月18日 於：北海道大学理学部数学教室 予稿集
File Information	54.pdf



[Instructions for use](#)

リーマン面に関連する位相幾何学

1998年9月14日～9月18日

於：北海道大学理学部数学教室

予稿集

Series #54. September, 1998

HOKKAIDO UNIVERSITY
TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS

- #25: K. Takasaki, “非線型可積分系の数理” 1992.9.28~10.2 北海道大学での集中講義講義録, 52 pages. 1993.
- #26: T. Nakazi (Ed.), 第1回関数空間セミナー報告集, 93 pages. 1993.
- #27: K. Kubota (Ed.), 第18回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 40 pages. 1993.
- #28: T. Hibi (Ed.), 1992年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures, 108 pages. 1993.
- #29: I. Sawashima, T. Nakazi (Eds.), 第2回関数空間セミナー報告集, 79 pages. 1994.
- #30: Y. Giga, Y.-G. Chen, 動く曲面を追いかけて, 講義録, 62 pages. 1994.
- #31: K. Kubota (Ed.), 第19回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 33 pages. 1994.
- #32: T. Ozawa (Ed.), 1993年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures, 113 pages. 1994.
- #33: Y. Okabe (Ed.), The First Sapporo Symposium on Complex Systems, 24 pages. 1994.
- #34: A. Arai, Infinite Dimensional Analysis on an Exterior Bundle and Supersymmetric Quantum Field Theory, 10 pages. 1994.
- #35: S. Miyajima, T. Nakazi (Eds.), 第3回関数空間セミナー報告集, 104 pages. 1995.
- #36: N. Kawazumi (Ed.), リーマン面に関連する位相幾何学, 63 pages. 1995.
- #37: I. Tsuda (Ed.), The Second & Third Sapporo Symposium on Complex Systems, 190 pages. 1995.
- #38: M. Saito (Ed.), 1994年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures, 100 pages. 1995.
- #39: S. Izumiya (Ed.), 接触幾何学と関連分野研究集会報告集, 186 pages. 1995.
- #40: H. Komatsu, A. Kishimoto (Eds.), 作用素論・作用素環論研究集会予稿集, 61 pages. 1995.
- #41: K. Okubo, T. Nakazi (Eds.), 第4回関数空間セミナー報告集, 103 pages. 1996.
- #42: R. Agemi (Ed.), 第20回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 47 pages. 1996.
- #43: R. Agemi, Y. Giga and T. Ozawa(Eds.), Nonlinear Waves, Proceedings of the Fourth MSJ International Research Institute Vol I, 269 pages. 1996.
- #44: R. Agemi, Y. Giga and T. Ozawa(Eds.), Nonlinear Waves, Proceedings of the Fourth MSJ International Research Institute Vol II, 270 pages. 1996.
- #45: G. Ishikawa (Ed.), 1995年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures, 98 pages. 1996.
- #46: R. Agemi (Ed.), 第21回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 34 pages. 1996.
- #47: N. Kawazumi (Ed.), リーマン面に関連する位相幾何学, 61 pages. 1996.
- #48: S. Miyajima, J. Inoue (Eds.), 第5回関数空間セミナー報告集, 90 pages. 1997.
- #49: T. Ozawa (Ed.), Proceedings of the 22nd Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 67 pages. 1997.
- #50: H.-F. Yamada (Ed.), 1996年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures, 99 pages. 1997.
- #51: N. Kawazumi (Ed.), リーマン面に関連する位相幾何学, 121 pages. 1997.
- #52: J. Inoue (Ed.), 第6回関数空間セミナー報告集, 89 pages. 1998.
- #53: Y. Giga (Ed.), Proceedings of the 23rd Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 77 pages. 1998.

リーマン面に関連する位相幾何学

1998年 9月14日～18日

於：北海道大学理学部数学教室

予稿集

はじめに

この予稿集は、トポロジー研究連絡会議の後援の下、平成10年度科学研究費基盤研究B・課題番号10440016「写像類群の構造とリーマン面のモジュライ空間の幾何学」（代表者：森田茂之氏（東大数理））の補助により1998年9月14日から18日まで北海道大学理学部数学教室で行われる研究集会「リーマン面に関連する位相幾何学」に際し、予め各講演者からあつめた原稿をそのまま印刷したものである。

その目的は、参加者が講演への理解を深め、より活発な研究討論を行う一助とするとともに、記録として残すことによって後々の研究に役立てることにある。

この研究集会の開催は、トポロジー研究連絡会議、森田先生はじめ多くの方々のご理解ご協力、さらに北海道大学理学部数学教室各位のご支援の上に成り立っていることを付記させていただく。

1998年8月

河澄響矢（北大理）

目次

配列は 50 音順による。

足利 正 (東北学院大工)	
Remarks on degenerations of Riemann surfaces	1
阿原 一志 (明治大理工)	
Hyperbolic digital curve shortening	3
市川 尚志 (佐賀大理工)	
Degeneration of Schottky uniformized Riemann surfaces	7
植村 毅 (北大理)	
リーマン面の有限自己同型群上の森田・マンフォード類 (仮題)	12
牛島 顕 (阪大理)	
境界のある曲面上のタイヒミュラー空間の分割	21
遠藤 久顕 (阪大理)	
Meyer's signature cocycle and hyperelliptic fibrations	27
大場 清、橋本 義武 (お茶の水大理、阪市大理)	
Dipoles and projective structures on Riemann surfaces	35
岡井 孝行	
SU(2)-representations of the genus 2 surface group and Pluecker embedding	37
笠川 良司 (東工大理)	
種数 2 の曲面の写像類群上のある関数について	43
北野 晃朗 (東工大理)	
写像類群から見た 3 次元多様体の H_1 -ボルディズム類と キャッソン不変量について	51

小松 亨(都立大理) Grothendieck の dessin --- 基本的事項から種数 0 の dessin の分岐数と差の積公式 ...	53
志甫 淳 (東北大理) P-adic Hodge theory for fundamental groups	70
角皆 宏(上智大理工)、中村 博昭(都立大理) ガロア群と写像類群をめぐる最近のいくつかの注意	78
難波 誠 (阪大理) Degenerating families of branched coverings of the complex projective line and balls	83
松本 眞 (慶應大理工) 写像類群のアルティン群による表示	85
松本 幸夫 (東大数理) 鎌田 聖一 (阪市大理) Braid群と写像類群に関連するあるRackについて	94
水嶋 滋 (東工大情報数理) トーラス上のアフィン構造とサークルパッキング	113
森山 哲裕 (京大数理研) Casson-Walker 不変量と 曲面の写像類群	115

Remarks on degenerations of Riemann surfaces

東北学院大・工 足利 正 (Tadashi Ashikaga)

こゝでの目的は、種数 g のリーマン面の退化についての以下の問題群に対し、いくつかの注意を与えることにある：

- (1) 1変数パラメータの退化について、退化型の分類・構成 および それに伴うモジュライ点、並びにモノドロミーを確定すること、
- (2) 退化ファイバー芽に対して意味のある不変量を定義・研究すること。特にペンシルを持つ大域的な複素曲面への応用を見込んで。
- (3) 多変数パラメータの退化について、退化ファイバーの「分裂・融合」の現象 — 例えば複雑な退化ファイバーが局所ペンシル自身の変形を通じて複数個の退化ファイバーに分解したりすること — を調べること。

講演では、まず $g=2$ の時の(由1)に対する古典的な 浪川-上野の結果 ([秋月誌号, 1973], [Manuscripta math, 1973]) の本質的部分が、Nielsen-松本-Montesinos (1994, 以下 NMM と略す) 理論を基にすれば非常に簡潔に得られることを注意することから入る。そして $g=3$ の時にも同様なリストが作れることを示す。

それどころか、NMM理論は退化のホモトピカル・מודロ
 ミーとなる写像類群の完全な特徴付けを与えただけで
 なく、ある種の“不定方程式たち”を介在にすれば、
 任意種数について(内1)を解くためのアルゴリズムを
 内在させていると見ることもできる。

(内2)については、超精用的な場合、最近遠藤久
 顕氏が($g=2$ の松本氏の結果[Proc. Taniguchi Sympo. 1996]
 を拡張して)マヤー・コサイフルの性質から“局所符号数”
 を定義したが、これは荒川-As. ([MPI preprint 1998])で
 定義した“堀川指数”と直接的関連があると思われる。

また、非超精用的種数3の退化ファイバーの解析
 はCastelnuovo曲面(\mathcal{C} , [今野-As., Tohoku J. 1990])と
 呼ばれる一般型曲面のあるクラスと関連し、その立場
 から“Castelnuovo指数”の重要性について触れた。

最後に、もしも時間があれば、(内3)について、超精
 用的な場合の「荒川-As.」の結果についても言及した
 い。 以上。

Hyperbolic digital curve shortening II

Kazushi AHARA

(阿原 一志)

1 序章.

Σ_g^n を種数 g の閉リーマン面から互いに disjoint な embedded open disks を n 枚取り除いたものとする。 Σ_g^n 上の胞体分割 H を考えよう。ただし、(技術的な理由により) 任意の 2 胞体についてその closure は disk と同相であると仮定する。 H に関する Σ_g^n 上の道全体を C_H と書いて、以下のように定義する。

$$C_H := \{ \gamma : I \rightarrow \Sigma_g^n \mid \begin{array}{l} \gamma \text{ は連続。} \\ \gamma \text{ は 0 胞体とは交わらない。} \\ \gamma \text{ は 1 胞体とは有限回横断的に交わる。} \\ \gamma \text{ の両端は 2 胞体上にある。} \end{array} \}$$

C_H の元の digitalization 全体 W_H を次で定義する。

$$W_H := \{ a_1 b_1 a_2 b_2 \cdots a_n b_n a_{n+1} \mid \begin{array}{l} a_i : 2 \text{ 胞体} \\ b_i : 1 \text{ 胞体} \\ a_i \neq a_{i+1} \\ \bar{a}_i \cap a_{i+1} \supset b_i \end{array} \}$$

φ_H を digitalization map $\varphi_H : C_H \rightarrow W_H$ であるとする。

W_H に「部分的な形で決まる書き換え」の系 S を考え、これが次の 4 つの条件を満たすことを考えよう。

- (C1) S は有限個の規則からなる。
- (C2) S によって W_H の元の word-length は長くならない。
- (C3) W_H の任意の元は S によって有限回の書き換えの後、極小元 (= それ以上書き換えられない元) になる。
- (C4) $\gamma_1, \gamma_2 \in C_H$ が $\gamma_1 \simeq \gamma_2$ (homotopic rel. boundary) であるならば、 $\varphi_H(\gamma_1)$ と $\varphi_H(\gamma_2)$ は唯一で共通の極小元を持つ。

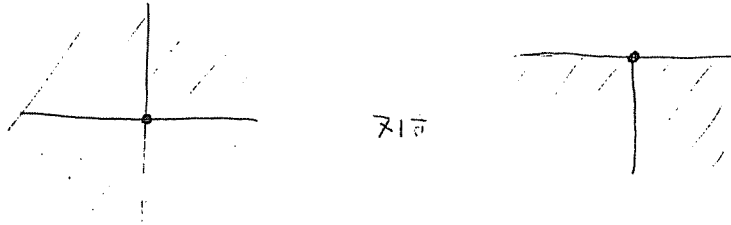
前著 Hyperbolic digital curve shortening においては、 $n = 0, g \geq 2$ なる Σ_g^n に対して、 H が適当な条件を持つ時に (C2)(C3)(C4) を満たす書き換え系の存在を示した。(そこで示された例は明らかに (C1) を満たさなかった。) 本論文においては、一般の Σ_g^n について、 H が同様の条件を満たせば、(C1) から (C4) のすべてを満たす書き換え系の存在を示す。また逆に、 H が orthogonal であるならば (定義後述)、(C1) から (C4) のすべてを満たす書き換え系はある意味で一意的であることを示す。

2 言葉の準備.

主定理を述べるために言葉の準備を行う。ここでの用語は前著 Hyperbolic digital curve shortening で用いられているものとは微妙に異なるので注意が必要である。

Definition 1

Σ_g^n の胞体分割 H が orthogonal であるとは、 Σ_g^n の内部の 0 胞体にはちょうど 4 本の 1 胞体があつまり、 Σ_g^n の境界の 0 胞体にはちょうど 3 本の 1 胞体があつまることをいう。

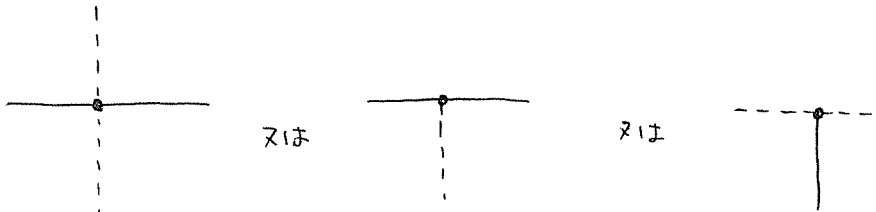


Definition 2

Σ_g^n の胞体分割 H が orthogonal の時に hyperbolic であるとは、すべての 2 胞体が 5 本以上の 1 胞体を持つことをいう。

Definition 3

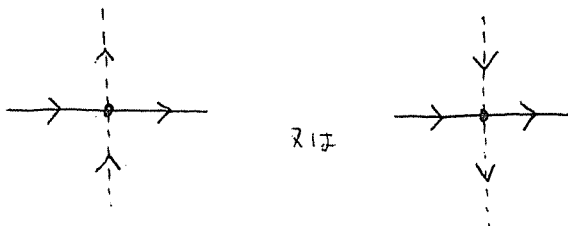
Σ_g^n の胞体分割 H の 1 胞体が colored であるとは、すべての 1 胞体が solid か dotted のいずれかに色分けされており、各 0 胞体の周りでは下図のいずれかになっていることをいう。また、このように色分けできる H を colorable であるという。



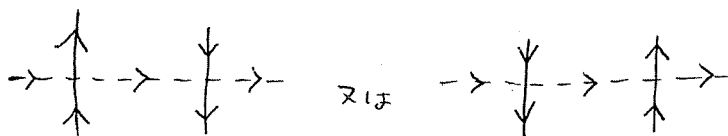
Definition 4

Σ_g^n の胞体分割 H の 1 胞体が colored であるとき、 H の 1 胞体が oriented であるとは、 Σ_g^n の内部に含まれる 1 胞体に向きがついており、局所的には下図のいずれかになっていることをいう。また、このように向きをつけることのできる胞体分割 H を orientable であるという。

0 胞体では



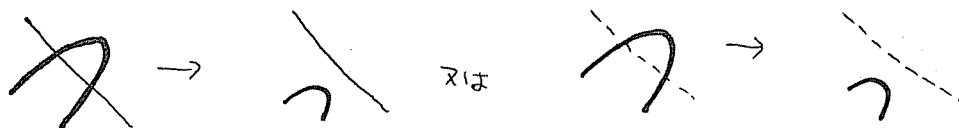
dotted 1-cell に着目すると



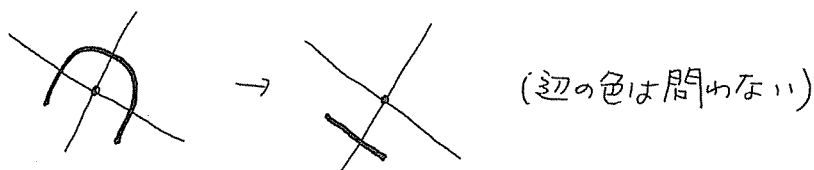
Definition 5

Σ_g^n の胞体分割 H が orthogonal で 1 胞体が colored, oriented であるとき、以下のような W_H (または C_H) の書き換え (S1) から (S4) からの書き換え系を S_* とする。図で向きの書かれていない 1 胞体について、その向きは問わないものとする。また図では C_H の元の書き換えを示している。

(S1)



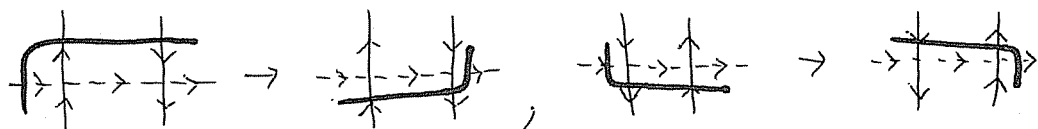
(S2)



(S3)



(S4)



3 主定理の命題.

Theorem 1

Σ_g^n の胞体分割 H が orthogonal, hyperbolic で 1 胞体が colored, oriented であるとする。書き換え系 S_* は条件 (C1) から (C4) をすべて満たす。

Theorem 2

(1) Σ_g^n (ただし $n = 0$) の胞体分割 H が orthogonal であるとせよ。任意の書き換え系 S が条件 (C1) から (C4) をすべて満たすならば、 H は colorable, orientable である。

(2) 上の条件のもとで胞体分割 H の 1 胞体に適当な色分け、向きづけをしたならば、(S1) から (S4) は S の生成する書き換え系に含まれる。

Degeneration of Schottky uniformized Riemann surfaces

佐賀大学理工学部数理科学科 市川尚志 (ichikawa@ms.saga-u.ac.jp)

始めに：このノートでは、Riemann 面の Schottky uniformization に関するいくつかの問題をあげ、それについて考える形で話を進めていますが、私の勉強不足のため記述に間違いや至らない所があるかも知れません。それについてはお許しを願うと共に、御助言、御意見等を頂ければ幸いです。

$\Gamma \subset PGL_2(\mathbf{C})$ を Schottky 群、すなわち双曲的な元から成る有限生成で自由な Klein 群とし、 $\Omega_\Gamma \subset \mathbf{P}_\mathbf{C}^1 = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ をその不連続領域とするとき、商空間 $R_\Gamma = \Omega_\Gamma/\Gamma$ は種数 $\text{rank}(\Gamma)$ の compact Riemann 面、すなわち \mathbf{C} 上の proper, smooth な代数曲線になる (また Koebe's theorem より、このようにしてすべての compact Riemann 面が得られることが知られている)。これを Γ による Schottky uniformization と言う。ここで次の問題を考える：

問題 1. R_Γ の退化の様子を Γ の言葉で記述せよ。

この問題に対する 1 つのアプローチとして、退化している (すなわち既約成分が smooth または singular な射影直線から成る) 安定曲線に “近い” R_Γ を次のように構成する ([IhN, §2] を参照)。

Δ を有限、連結な graph でその各頂点が 3 個以上の枝を持つものとする (すなわち Δ はある退化安定曲線の dual graph になる)。 Δ の頂点、辺のなす集合をそれぞれ V, E と書く。 Δ の向き (すなわち E の各元の向き) を 1 つ決めると、隣接する辺 $e \in E$ と頂点 $v \in V$ の組 e/v を、 $e \in \{\pm h\}, v = v_h$ (h の終点) を満たす $\pm E = \{\pm e \mid e \in E\}$ の元 h によって表すことができる。いま写像

$$\lambda: \pm E \longrightarrow \mathbf{P}_\mathbf{C}^1$$

で次の条件

$$\lambda(e) \neq \lambda(-e), \quad h \neq h', v_h = v_{h'} \Rightarrow \lambda(h) \neq \lambda(h')$$

を満たすものをとる。0 でない複素数 $s_h = s_{-h}$ ($h \in \pm E$) に対し、 $\lambda(\pm h)$ を fixed points, s_h を multiplier に持つ $PGL_2(\mathbf{C})$ の元

$$\varphi_h = \begin{pmatrix} \lambda(h) & \lambda(-h) \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda(h) & \lambda(-h) \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \pmod{\mathbf{C}^\times}$$

をとり、準同型写像 $\iota: \pi_1(\Delta) \rightarrow PGL_2(\mathbb{C})$ を

$$\iota(h_1 \circ h_2 \circ \cdots \circ h_n) = \varphi_{h_1} \varphi_{h_2} \cdots \varphi_{h_n} \quad (h_i \in \pm E)$$

で定めるとき、次が成り立つ：

- (1) s_e ($e \in E$) が十分小さいとき、 $\text{Im}(\iota)$ は Schottky 群。
- (2) $s_e \rightarrow 0$ ($e \in E$) のとき、 $R_{\text{Im}(\iota)}$ は Δ を dual graph に持つ退化安定曲線

$$R_{(\Delta, \lambda)} = \bigcup_{v \in V} P_v \Big/ \lambda(e) = \lambda(-e) \quad (e \in E); \quad P_v := \mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1$$

に退化する。

この応用として、(よく知られた事実だとは思いますが) 例えば Schottky 群 $\Gamma = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_g \rangle$ の生成元 γ_i が $\alpha_{\pm i}$ を fixed points、 β_i を multiplier に持つとし、 Γ' を γ_j ($j \neq i$) で生成される Γ の部分群とすると、 $\beta_i \rightarrow 0$ ならば R_Γ は $R_{\Gamma'}$ 上の 2 点 $\alpha_{\pm i}$ をつなげたものに退化し、 $\alpha_{-i} \rightarrow \alpha_i$ ならば R_Γ は $R_{\Gamma'}$ 上の点 α_i に楕円曲線 $\mathbb{C}^\times / \langle \beta_i \rangle$ をつなげたものに退化することがわかる。また $R_{\text{Im}(\iota)}$ の微分形式の Laurent 係数や周期積分を $\lambda(h)$ ($h \in \pm E$) の有理式を係数とする s_e ($e \in E$) の計算可能な巾級数として表し ([I1], [I2] を参照)、これらについての variational formula ([F], [ImT, Appendix A] を参照) を確かめることができる。

そこで問題 1 に関連して：

問題 1'. 上記のような R_Γ の退化と、 Γ を放物的な元を含む Klein 群に変形することにより生じる R_Γ の退化との関係を調べよ。

さて graph Δ に対し単射写像

$$\tau_v: \{0, 1, \infty\} \longrightarrow \{h \in \pm E \mid v_h = v\}$$

の組 $\tau = (\tau_v)_{v \in V}$ で次の条件

$$a \in \{0, 1, \infty\}, \quad v \neq v' \implies \tau_v(a) \neq -\tau_{v'}(a)$$

を満たすもの (これを Δ の rigidification と呼ぶ) をとり、

$$\mathcal{E} = \pm E - \bigcup_{v \in V} \text{Im}(\tau_v)$$

とする。このとき上記の写像 $\lambda: \pm E \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1$ で $\lambda \circ \tau_v = \text{id}_{\{0, 1, \infty\}}$ ($v \in V$) を満たすもの (これを τ に関する Δ の labeling と呼ぶ) は Δ を dual graph に持

つ退化安定曲線の moduli を記述し、十分小さい複素数 s_e ($e \in E$) は $R_{(\Delta, \lambda)}$ の deformation parameter となるから、 λ と s_e を動かすことにより、

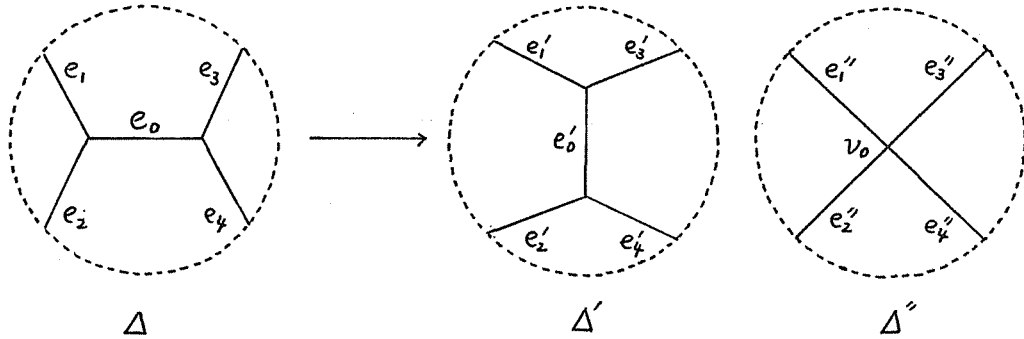
$$z_{(\Delta, \tau)} = \{\lambda(h)\}_{h \in \mathcal{E}} \cup \{s_e\}_{e \in E}$$

が安定曲線の moduli 空間の中で $R_{(\Delta, \lambda)}$ に対応する locus の周りの局所座標を与えることがわかる。このように、退化曲線の任意の moduli parameter と deformation parameter の組が moduli 空間の局所座標を与えることは良く知られているが ([DM] 参照)、 $z_{(\Delta, \tau)}$ は Schottky uniformization を用いて具体的に構成されるため、上に述べたように Torelli map が計算できるなどの応用を持っている。以下この局所座標の性質について考える。

問題 2. 局所座標 $z_{(\Delta, \tau)}$ はどれ位大域的なものになるか。また Δ が trivalent となる（すなわちすべての頂点が丁度 3 個の枝を持つ）とき、 Δ に対応する pants 分解に関する Fenchel-Nielsen 座標と $z_{(\Delta, \tau)}$ との関係を調べよ。

問題 3. $z_{(\Delta, \tau)}$ 相互の関係を調べよ。

問題 3 へのアプローチとして、Riemann 面の moduli 空間の “duality groupoid” ([MS] 参照) における基本生成元の 1 つに対応した次のような状況を考える。 $\Delta = (V, E)$ を trivalent graph とし、 $\Delta' = (V', E')$, $\Delta'' = (V'', E'')$ を Δ の 1 部分をそれぞれ次のように変えて得られる graph とする：



いま τ, τ', τ'' をそれぞれ $\Delta, \Delta', \Delta''$ の rigidification で

$$\tau''_{v_0}(0) = e''_2/v_0, \quad \tau''_{v_0}(1) = e''_3/v_0, \quad \tau''_{v_0}(\infty) = e''_4/v_0$$

を満たすものとし、 λ'' を τ'' に関する Δ の labeling とすると、 $x = \lambda''(e''_1/v_0)$ は $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} - \{0, 1, \infty\} \cong \text{the moduli space of } R_{(\Delta'', \lambda'')}$ の座標で

$$R_{(\Delta'', \lambda'')} \rightarrow R_{\Delta} \text{ (if } x \rightarrow 0), \quad R_{(\Delta'', \lambda'')} \rightarrow R_{\Delta'} \text{ (if } x \rightarrow 1)$$

を満たす。 s_e ($e \in E$), $t_{e'}$ ($e' \in E'$), $u_{e''}$ ($e'' \in E''$) をそれぞれ τ, τ', τ'' から上記のようにして定まる $R_{\Delta}, R_{\Delta'}, R_{(\Delta'', \lambda'')}$ の deformation parameter とし、特に e_i

$(0 \leq i \leq 4), e'_j (0 \leq j \leq 4), e''_k (1 \leq k \leq 4)$ に対応する parameter をそれぞれ s_i, t_j, u_k とおく。このとき：

定理 1.

(1) 各 $x, u_{e''}$ は十分小さい値に対して収束する $s_e (e \in E)$ の \mathbf{Z} -係数巾級数として表され、 e_1, e_2, e_3, e_4 が互いに異なるとき

$$\frac{x}{s_0}, \frac{u_i}{s_0 s_i} (i = 1, 2), \frac{u_i}{s_i} (i = 3, 4) \in (\mathbf{Z}[[s_e (e \in E)]])^\times,$$

また $e_1 = e_2$ となるとき

$$\frac{x}{s_0}, \frac{u_i}{s_i} (i = 1, 2, 3, 4) \in (\mathbf{Z}[[s_e (e \in E)]])^\times.$$

(2) 各 $x, u_{e''}$ は十分小さい値に対して収束する $t_{e'} (e' \in E')$ の \mathbf{Z} -係数巾級数として表され、 e_1, e_2, e_3, e_4 が互いに異なるとき

$$\frac{1-x}{t_0}, \frac{u_i}{t_0 t_i} (i = 1, 3), \frac{u_i}{t_i} (i = 2, 4) \in (\mathbf{Z}[[t_{e'} (e' \in E')]])^\times,$$

また $e_1 = e_2$ となるとき

$$\frac{1-x}{t_0}, \frac{u_i}{t_0 t_i} (i = 1, 2, 3), \frac{u_i}{t_i} (i = 4) \in (\mathbf{Z}[[t_{e'} (e' \in E')]])^\times.$$

さらに $z_{(\Delta, \tau)}$ の数論的性質については、[Mu] の結果を局所的とは限らない基礎環の場合に拡張することにより次が示されている：

定理 2. (Δ が trivalent で loop を持たないとき [IhN]、一般には [I3])

Δ の rigidification τ に対し、 $x_h (h \in \mathcal{E}), y_e (e \in E)$ を変数とし

$$A_0 = \mathbf{Z} \left[x_h (h \in \mathcal{E}), \prod_{e \in E} \frac{1}{x_e - x_{-e}}, \prod_{h \neq h', v_h = v_{h'}} \frac{1}{x_h - x_{h'}} \right]$$

(ただし $x_{\tau_v(0)} = 0, x_{\tau_v(1)} = 1, \{h, h'\} \cap \{\tau_v(\infty) \mid v \in V\} \neq \emptyset \Rightarrow 1/(x_h - x_{h'}) = 0$) とおくとき、 $A_0[[y_e (e \in E)]]$ 上の安定代数曲線 C で、 τ に関する Δ の labeling λ と十分小さい $s_e (e \in E)$ に対し

$$C|_{x_h = \lambda(h), y_e = s_e} = R_{\text{Im}(\iota)}$$

を満たすものが存在する。従って特に Δ が trivalent のとき $A_0 = \mathbf{Z}$ となり、 $z_{(\Delta, \tau)}$ は安定曲線の moduli stack ([DM]) において R_Δ に対応する点の \mathbf{Z} 上の形式近傍を与える。

注意. 上記の 2 つの定理は、点付き安定曲線の moduli 空間 ([K]) に対しても同様に拡張される (定理 2 の拡張については [IhN] を参照)。

References

- [DM] P. Deligne and D. Mumford, The irreducibility of the space of curves of given genus, Publ. Math. I.H.E.S. **36** (1969) 75-109
- [F] J. D. Fay, Theta functions on Riemann surfaces, Lecture Notes in Math., vol. 352, Springer-Verlag (1973)
- [I1] T. Ichikawa, The universal periods of curves and the Schottky problem, Compositio Math. **85** (1993) 1-8
- [I2] T. Ichikawa, P -adic theta functions and solutions of the KP hierarchy, Comm. Math. Phys. **176** (1996) 383-399
- [I3] T. Ichikawa, Generalized Tate curve and integral Teichmüller modular forms, Preprint
- [IhN] Y. Ihara and H. Nakamura, On deformation of maximally degenerate stable marked curves and Oda's problem, J. Reine Angew. Math. **487** (1997) 125-151
- [ImT] Y. Imayoshi and M. Taniguchi, An introduction to Teichmüller spaces, Springer-Verlag (1992)
- [K] F. Knudsen, The projectivity of the moduli space of stable curves II, Math. Scand. **52** (1983) 161-199
- [MS] G. Moore and N. Seiberg, Classical and quantum conformal field theory, Comm. Math. Phys. **123** (1989) 177-254
- [Mu] D. Mumford, An analytic construction of degenerating curves over complete local rings, Compositio Math. **24** (1972) 129-174

RIEMANN-HURWITZ FORMULA FOR MORITA-MUMFORD CLASSES AND SURFACE SYMMETRIES

NARIYA KAWAZUMI AND TAKESHI UEMURA

ABSTRACT. Let a finite group G act on a compact Riemann surface C in a faithful and orientation preserving way. Then we describe the Morita-Mumford classes $e_n(C_G) \in H^{2n}(G; \mathbb{Z})$ of the homotopy quotient (or the Borel construction) C_G of the action in terms of fixed-point data. This fixed-point formula is deduced from a higher analogue of the classical Riemann-Hurwitz formula based on computations of Miller [Mi] and Morita [Mo].

INTRODUCTION.

The last two decades have witnessed a remarkable progress of cohomological study of the mapping class group for a surface. D. Mumford [Mu] and S. Morita [Mo1] independently defined a series of cohomology classes of the mapping class group, whose zeroth term is equal to the Euler number of the surface up to sign. J. Harer has been obtaining various significant results including the homology stability of the mapping class groups [H1]. The Morita-Mumford classes play an important role in the stable cohomology ring of the mapping class groups. It has been revealed by Arbarello, Cornalba, Harer, Miller, Morita and others [AC] [H2-3] [Mi] [Mo1-4] [KM]. The torsion part of the cohomology of the mapping class groups has been highly studied by homotopy theorists including Benson, Charney, Cohen, Lee, Tillmann and Xia [BC] [CC] [CL] [T] [X1,2]. It is notable that Glover and Mislin [GM] have proved there exists a nontrivial torsion class in the $4n$ -dimensional stable cohomology group for each $n \geq 1$ by evaluating the even Chern classes of $GL(\mathbb{Z})$ on torsion elements of the mapping class groups.

In the context of surface bundles the Morita-Mumford classes are defined as follows. Let $\pi : X \rightarrow B$ be an oriented fiber bundle whose fiber is a 2-dimensional connected closed oriented smooth manifold. We call such a bundle briefly a *surface bundle*. The relative tangent bundle $T_{X/B}$ is the oriented real 2-dimensional vector bundle over the total space X consisting of all the tangent vectors along the fibers. The n -th Morita-Mumford class e_n is, by definition, the Gysin image of the $n+1$ -th power of its Euler class $e := e(T_{X/B}) \in H^2(X; \mathbb{Z})$

$$e_n = e_n(X) := \pi_!(e^{n+1}) \in H^{2n}(B; \mathbb{Z}),$$

1991 *Mathematics Subject Classification*. Primary, 57R20. Secondary, 14H15, 20J06, 32G15, 55R40, 57M20, 57S17.

which is equal to the pull-back of e_n by the holonomy homomorphism of $\pi_1(B)$ into the mapping class group. Here and throughout this paper we denote the Euler class of an oriented real vector bundle η by $e(\eta)$. If $n = 0$, e_0 is equal to the Euler number of the fibers.

The purpose of the present paper is to study Morita-Mumford classes on finite subgroups of the mapping class groups. We give an explicit formula for the Morita-Mumford classes evaluated on an arbitrary finite subgroup of the mapping class groups in terms of fixed-point data (Theorem B). The authors hope their explicit formula would be widely used to study the torsion part of the cohomology of the mapping class groups.

Our fixed-point formula is deduced from a general formula of Morita-Mumford classes for fiberwise branched coverings of surface bundles. Miller [Mi] and Morita [Mo1], inspired by Atiyah [A], Hirzebruch [Hi] and Kodaira [Ko], computed Morita-Mumford classes of iterated cyclic coverings to prove the stable algebraic independence of e_n 's. Following their computations, we prove it under a certain transversality condition (Theorem A) in §1.

Let $\pi_X : X \rightarrow B$ and $\pi_Y : Y \rightarrow B$ be two surface bundles, and $h : X \rightarrow Y$ a continuous map compatible with the projections. Suppose the map h restricted to each fiber is an orientation preserving branched covering. Denote by R the subset of X consisting of all the ramification points of the map h . Now we assume a *transversality condition* that the restriction of π_X to R is a locally trivial fibration, and that there exists a fiber preserving homeomorphism $t : D(T_{X/B}|_R) \hookrightarrow X$ onto an open neighborhood of R such that $t(0_x) = x$ for all $x \in R$. We call it a *fiberwise tubular neighborhood* of R . Here we denote by $D(\eta)$ the open unit disk bundle associated with a vector bundle η with respect to a suitable metric. Let R_1, R_2, \dots, R_m be the connected components of R , and b_i the ramification degree along R_i . Then

Theorem A. *In the situation stated above we have*

$$e_n(X) = (\deg h) e_n(Y) + \sum_{i=1}^m (1 - b_i^{n+1}) (\pi_X|_{R_i})_! (e(T_{X/B}|_{R_i})^n) \in H^{2n}(B; \mathbb{Z}).$$

for any $n \geq 1$, where $\deg h \in \mathbb{Z}$ is the fiberwise mapping degree of h , and $(\pi_X|_{R_i})_! : H^*(R_i; \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(X; \mathbb{Z})$ is the Gysin map associated with the fibration $\pi_X|_{R_i}$.

It also holds for the case $n = 0$. In fact, since e_0 is the Euler number of the fibers, the formula

$$e_0(X) = (\deg h) e_0(Y) + \sum_{i=1}^m (1 - b_i) \cdot \#(\text{the fiber of } \pi_X|_{R_i}).$$

is exactly the classical Riemann-Hurwitz formula. This is the reason why we regard Theorem A as a higher analogue of the Riemann-Hurwitz formula.

If the surface bundles π_X and π_Y are C^∞ -surface bundles, h is a C^∞ map, and the ramification locus R is a C^∞ -submanifold of X transverse to the fibers, then the transversality condition stated above is satisfied.

As another typical example satisfying the transversality condition we have Morita-Mumford classes on finite subgroups of the mapping class groups. In view of the affirmative solution of the Nielsen realization problem by Kerckhoff [Ke] any finite subgroup of the mapping class group is realized as a holomorphic automorphism group of a suitable Riemann surface. Therefore we may consider the following situation.

Let G be a finite group and C a closed oriented connected 2-dimensional smooth manifold. Suppose G acts on C in a faithful and orientation preserving way. Then we may regard G as a subgroup of the mapping class group. The universal principal G -bundle $E_G \rightarrow B_G$ induces the homotopy quotient (or the Borel construction) of the action $\pi : C_G \rightarrow B_G$. The space C_G is, by definition, the quotient of $E_G \times C$ by the diagonal action of G . The map π induced by the first projection provides an oriented fiber bundle with fiber C

$$C \rightarrow C_G \xrightarrow{\pi} B_G.$$

Its Morita-Mumford class $e_n(C_G) \in H^*(B_G; \mathbb{Z}) = H^*(G; \mathbb{Z})$ is equal to the restriction of e_n to the subgroup G .

If π_X is the surface bundle $\pi : C_G \rightarrow B_G$, π_Y the product bundle $B_G \times (C/G) \rightarrow B_G$, and $h : C_G \rightarrow B_G \times (C/G)$ the canonical projection, then the transversality condition is satisfied. Therefore Theorem A implies the following fixed-point formula as is shown in §2.

Denote the isotropy group at a point $p \in C$ by G_p . The exceptional set

$$S := \{p \in C; G_p \neq \{1\}\}$$

is a G -stable finite subset of C , since the action is faithful and orientation preserving. Let ξ_p be the oriented real 2-dimensional vector bundle over B_{G_p} associated with the action of G_p on the tangent space $T_p C$ and $e(\xi_p) \in H^2(B_{G_p}; \mathbb{Z}) = H^2(G_p; \mathbb{Z})$ its Euler class. Since the transfer map $\text{cor}_{G_p}^G : H^*(G_p; \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(G; \mathbb{Z})$ is invariant under conjugation, the cohomology class $\text{cor}_{G_p}^G(e(\xi_p)^n) \in H^{2n}(G; \mathbb{Z})$ is constant on each G -orbit.

Theorem B. *In the situation stated above we have*

$$e_n(C_G) = \sum_{p \in S/G} \text{cor}_{G_p}^G(e(\xi_p)^n) \in H^{2n}(B_G; \mathbb{Z}) = H^{2n}(G; \mathbb{Z})$$

for any $n \geq 1$.

The right-hand side depends only on the isotropy groups and their actions on the tangent spaces at the exceptional points. Our formula may be regarded as a certain kind of *fixed-point formulas* of characteristic classes. Especially if the action is free, the Morita-Mumford classes $e_n(C_G)$ vanish for all $n \geq 1$.

1. Riemann-Hurwitz Formula for Morita-Mumford Classes.

In this section we shall prove Theorem A following Miller [Mi] and Morita [Mo]. Let $\pi_X : X \rightarrow B$, $\pi_Y : Y \rightarrow B$, $h : X \rightarrow Y$, R and R_i be as in Introduction. We abbreviate as $e_X := e(T_{X/B})$, $e_Y := e(T_{Y/B})$ and $\eta_i := T_{X/B}|_{R_i}$. From the transversality condition we have a fiberwise tubular neighborhood $t_i : D(\eta_i) \rightarrow X$. Since $\{X - R, t_i(D(\eta_i)); 1 \leq i \leq m\}$ is an open covering of X , we obtain an excision isomorphism

$$t^* : H^*(X, X - R) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{i=1}^m H^*(E(\eta_i), E_0(\eta_i)).$$

Here $E(\eta_i)$ is the total space of the bundle η_i and $E_0(\eta_i) = E(\eta_i) - (\text{zero section})$.

Let $\phi_i : H^{*-2}(R_i) \rightarrow H^*(E(\eta_i), E_0(\eta_i))$ be the Thom isomorphism associated with η_i , and $U_i \in H^2(X, X - R)$ such as $t^*(U_i) = \phi_i(1)$. $H^2(X, X - R)$ is \mathbb{Z} -free with free basis $\{U_1, U_2, \dots, U_m\}$. Clearly we have

$$(1.1) \quad t^*(U_i U_j) = \begin{cases} \phi_i(e(\eta_i)), & \text{if } i = j \\ 0, & \text{if } i \neq j. \end{cases}$$

Since $T_{X/B}$ is isomorphic to $h^*T_{Y/B}$ on $X - R$, the difference $e_X - h^*e_Y$ is in the image of the inclusion homomorphisms $j^* : H^2(X, X - R) \rightarrow H^2(X)$, i.e., we have $e_X - h^*e_Y = j^*(\sum_{i=1}^m a_i U_i) \in H^2(X)$ for some $a_i \in \mathbb{Z}$. Restricting it to each R_i , we obtain

$$(1.2) \quad e(\eta_i) - b_i e(\eta_i) = a_i e(\eta_i) \in H^2(R_i),$$

where b_i is the ramification degree along R_i . From (1.1) and (1.2)

$$\begin{aligned} e_X^{n+1} &= h^*e_Y^{n+1} + j^* \left(\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} (h^*e_Y|_{R_i})^{n+1-k} a_i^k U_i^k \right) \\ &= h^*e_Y^{n+1} + j^* \left(\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} b_i^{n+1-k} a_i^k e(\eta_i)^n U_i \right) \\ &= h^*e_Y^{n+1} + j^* \left(\sum_{i=1}^m (1 - b_i^{n+1}) e(\eta_i)^n U_i \right) \end{aligned}$$

for any $n \geq 1$. Hence we obtain

$$(1.3) \quad e_X^{n+1} = h^*e_Y^{n+1} + j^*(t^*)^{-1} \left(\sum_{i=1}^m (1 - b_i^{n+1}) \phi_i(e(\eta_i)^n) \right)$$

for $n \geq 1$.

We denote the fibers of the bundles $\pi_X : X \rightarrow B$, $\pi_X|_{(X-R)} : X - R \rightarrow B$ and $\pi_X|_{R_i} : R_i \rightarrow B$ over a point $s_0 \in B$ by C , C^0 and $R_i|_{s_0}$ respectively. The Serre spectral sequence of the pair of fiber bundles $(X, X - R)$ induces an isomorphism

$$\pi_{X*} : H^*(X, X - R) \xrightarrow{\cong} H^{*-2}(B; H^2(C, C^0)).$$

As a $\pi_1(B)$ -module, $H^2(C, C^0)$ decomposes itself into $\bigoplus_{i=1}^m H^0(R_i|s_0)$. The cohomology group $H^{*-2}(B; H^0(R_i|s_0))$ is naturally isomorphic to $H^{*-2}(R_i)$, and the integration map $H^0(R_i|s_0) \rightarrow \mathbb{Z}$ induces the Gysin map $(\pi_X|_{R_i})_! : H^{*-2}(R_i) \rightarrow H^{*-2}(B)$. Therefore we obtain a commutative diagram

$$(1.4) \quad \begin{array}{ccccc} H^*(X, X - R) & \xrightarrow{\pi_{X*}} & H^{*-2}(B; H^2(C, C^0)) & \xlongequal{\quad} & \bigoplus_{i=1}^m H^{*-2}(R_i) \\ j^* \downarrow & & j^* \downarrow & & \bigoplus (\pi_X|_{R_i})_! \downarrow \\ H^*(X) & \longrightarrow & H^{*-2}(B; H^2(C)) & \xrightarrow{<,[C]>} & H^{*-2}(B). \end{array}$$

The composite of the lower arrows is equal to the Gysin map $\pi_{X!}$ in the definition of the Morita-Mumford classes, and that of the upper ones equal to $(\bigoplus \phi_i^{-1}) \circ t^*$. Consequently, from (1.3), we obtain

$$\begin{aligned} e_n(X) &= \pi_{X!}(e_X^{n+1}) = \pi_{X!} \left(h^* e_Y^{n+1} + j^*(t^*)^{-1} \left(\sum_{i=1}^m (1 - b_i^{n+1}) \phi_i(e(\eta_i)^n) \right) \right) \\ &= (\deg h) e_n(Y) + (\bigoplus (\pi_X|_{R_i})_!) \pi_{X*}(t^*)^{-1} \left(\sum_{i=1}^m (1 - b_i^{n+1}) \phi_i(e(\eta_i)^n) \right) \\ &= (\deg h) e_n(Y) + \sum_{i=1}^m (1 - b_i^{n+1}) (\pi_X|_{R_i})_!(e(\eta_i)^n). \end{aligned}$$

This completes the proof of Theorem A.

2. Fixed-point Formula for Surface Symmetries.

In order to prove Theorem B, fix a complete system of representatives $\{p_1, p_2, \dots, p_m\} \subset S$ with respect to the action of G . We abbreviate as $G_i = G_{p_i}$ and $\xi_i = \xi_{p_i}$. The quotient E_G/G_i can serve as the classifying space B_{G_i} .

Consider the canonical projection

$$h : C_G = (E_G \times C)/G \rightarrow B_G \times (C/G), \quad (x, z) \bmod G \mapsto (x \bmod G, z \bmod G).$$

The homotopy quotient $S_G := (E_G \times S)/G$ may be regarded as a closed subset of C_G , and coincides with the ramification locus R of the branched covering h . Clearly $\pi|_{S_G} : S_G \rightarrow B_G$ is a locally trivial fibration.

Each representative p_i corresponds to a connected component of R . We introduce a map $f_i : B_{G_i} \rightarrow C_G$ ("multi-valued section of π ") by $f_i(x \bmod G_i) := (x, p_i) \bmod G$. From a G -stable decomposition $S = \coprod_{i=1}^m G \cdot p_i$ we find $S_G = \coprod_{i=1}^m f_i(B_{G_i})$. Choose a sufficiently small G_i -stable open disk $D_i \subset C$ centered at each p_i . The map defined by

$$t_i : (E_G \times D_i)/G_i \rightarrow C_G, \quad (x, z) \bmod G_i \mapsto (x, z) \bmod G$$

can be regarded as a tubular neighborhood of the connected component $f_i(B_{G_i})$. Thus the branched covering h satisfies the transversality condition in Theorem A.

The relative tangent bundle T_{C_G/B_G} is equal to the homotopy quotient of the tangent bundle TC , $T_{C_G/B_G} = (E_G \times TC)/G$. Hence the disk bundle $(E_G \times D_i)/G_i$ is isomorphic to the unit disk bundle of $\xi_i = (E_G \times T_{p_i}C)/G_i$. Clearly $e(T_{B_G \times (C/G)/B_G})^{n+1} = 0$ for $n \geq 1$. Since $b_i = \sharp G_i$, we have $b_i e(\xi_i) = 0 \in H^2(B_{G_i})$. Therefore Theorem A implies

$$e_n(C_G) = \sum_{i=1}^m \left(\pi|_{f_i(B_{G_i})} \right)_! (e(\xi_i)^n)$$

for $n \geq 1$.

Conceptually a transfer map results from a Gysin map. In this section, however, we replace the Gysin map $\left(\pi|_{f_i(B_{G_i})} \right)_!$ with the transfer map $\text{cor}_{G_i}^G$ in an explicit manner. For we believe it will be good for future actual computations.

Consider the relative cohomology $H^2(C, C^0)$, where $C^0 = C - S$. Let $\nu_i \in H_2(C, C^0)$ be the image of the positive generator of $H_2(D_i, D_i - \{p_i\})$. The evaluation at ν_i induces a G -isomorphism

$$\nu_* : H^2(C, C^0) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{i=1}^m \text{Hom}_{\mathbb{Z}[G_i]}(\mathbb{Z}[G], \mathbb{Z})$$

by the universal mapping property of coinduced modules, and an isomorphism

$$\nu_* : H^{*-2}(B_G; H^2(C, C^0)) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{i=1}^m H^{*-2}(B_{G_i}; \mathbb{Z})$$

by Shapiro's Lemma (cf. e.g., Brown [B].) Therefore we have a commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} H^{*-2}(B_G; H^2(C, C^0)) & \xrightarrow{\nu_*} & \bigoplus_{i=1}^m H^{*-2}(B_{G_i}) \\ j^* \downarrow & & \downarrow \oplus \text{cor}_{G_i}^G \\ H^{*-2}(B_G; H^2(C)) & \xrightarrow{< \cdot, [C] >} & H^{*-2}(B_G) \end{array}$$

from the definition of the transfer map $\text{cor}_{G_i}^G$. Comparing it with the commutative diagram (1.4), we obtain

$$e_n(C_G) = \sum_{i=1}^m \left(\pi|_{f_i(B_{G_i})} \right)_! (e(\xi_i)^n) = \sum_{i=1}^m \text{cor}_{G_i}^G (e(\xi_i)^n)$$

for $n \geq 1$. This completes the proof of Theorem B.

3. Applications.

Let G be a perfect finite subgroup of the mapping class group of genus g , and C a compact Riemann surface on which G acts as a holomorphic automorphism group. Then, for any element $\gamma \in G$, we have

$$e_1(C_{\langle \gamma \rangle}) = 0 \in H^2(\langle \gamma \rangle; \mathbb{Z}),$$

since $H^2(G; \mathbb{Z}) = \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(H_1(G; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) = 0$. Here we denote by $\langle \gamma \rangle$ the subgroup of the mapping class group generated by γ . Therefore we obtain

Lemma. *If $e_1(C_{\langle \gamma \rangle}) \neq 0 \in H^2(\langle \gamma \rangle; \mathbb{Z})$, there is no perfect finite subgroup containing γ in the mapping class group.*

As an example, consider two complex plane curves

$$w^2 = 1 - z^{2g+1}, \quad w_1^2 = z_1(z_1^{2g+1} - 1)$$

for $g \geq 1$. Glueing them each other by the map $z_1 = z^{-1}$, $w_1 = z^{-g-1}w$, we obtain a hyperelliptic curve C of genus g . $\zeta := \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{2g+1}\right)$ defines an automorphism of the curve by $z \mapsto \zeta z$ and $w \mapsto w$. It induces an element γ of order $2g+1$ of the mapping class group of genus g . Let $u_0 \in H^2(\langle \gamma \rangle; \mathbb{Z})$ be the Euler class associated with the complex 1-dimensional G -module given by multiplication by ζ . u_0^n generates the group $H^{2n}(\langle \gamma \rangle; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/(2g+1)$ for each n . Then Theorem B implies

$$e_n(C_{\langle \gamma \rangle}) = u_0^n + u_0^n + ((-g-1)u_0)^n = (2+g^n)u_0^n \in H^{2n}(\langle \gamma \rangle; \mathbb{Z}).$$

for any $n \geq 1$. Especially $e_1(C_{\langle \gamma \rangle}) \neq 0$ if $g \geq 2$. Hence the element γ is not contained in any perfect finite subgroup of the mapping class group of genus $g \geq 2$ from the lemma stated above. Moreover we obtain $e_1^n \neq 0$ for any $n \geq 1$ as a torsion element of the cohomology group of the mapping class group of genus g , provided that $2g+1$ is not a power of 3.

The second author has found some finite cyclic subgroups satisfying $e_{\text{odd}} = 0$ and $e_2 \neq 0$. Moreover he has found a cyclic subgroup satisfying $e_1 = e_2 = 0$ and $e_3 \neq 0$. The details will be appear elsewhere. It would be interesting that there would exist a finite subgroup satisfying $e_1 = e_2 = \dots = e_{n-1} = 0$ and $e_n \neq 0$ for each $n \geq 4$.

Acknowledgements. The authors would like to express to Professor S. Morita for valuable comments and encouragement, and to Doctors Y. Kasahara and T. Morifuji for helpful discussions.

REFERENCES

- [AC] E. Arbarello and M. Cornalba, *Calculating cohomology groups of moduli spaces of curves via algebraic geometry*, preprint, math.AG/9803001.
- [A] M. F. Atiyah, *The signature of fibre-bundles*, Global Analysis, Papers in honor of K. Kodaira, University of Tokyo Press, Tokyo, 1969, pp. 73–84.

- [BC] D.J. Benson and F.R. Cohen, *Mapping class groups of low genus and their cohomology*, Mem. Amer. Math. Soc. **443** (1991).
- [B] K.S. Brown, *Cohomology of Groups*, Springer, New York-Heidelberg-Berlin, 1982.
- [CC] R.M. Charney and F.R. Cohen, *A stable splitting for the mapping class group*, Michigan Math. J. **35** (1988), 269–284.
- [CL] R.M. Charney and R. Lee, *An application of homotopy theory to mapping class groups*, J. Pure Appl. Alg. **44** (1987), 127–135.
- [GM] H. Glover and G. Mislin, *Torsion in the mapping class group and its cohomology*, J. Pure Appl. Alg. **44** (1987), 177–189.
- [H1] J. Harer, *Stability of the homology of the mapping class group of orientable surfaces*, Ann. Math. **121** (1985), 215–249.
- [H2] ———, *The second homology group of the mapping class group of an orientable surface*, Invent. math. **72** (1983), 221–239.
- [H3] ———, *The third homology group of the moduli of curves*, Duke Math. J. **65** (1991), 25–55.
- [Hi] F. Hirzebruch, *The signature of ramified coverings*, Global Analysis, Papers in honor of K.Kodaira, University of Tokyo Press, Tokyo, 1969, pp. 253–265.
- [I] T. Izawa, *Chern number formula for ramified coverings*, Master Thesis, Hokkaido University, (1997). A summary is in: RIMS Kokyuroku **1033** (1998), Kyoto University.
- [Ka] N. Kawazumi, *Homology of hyperelliptic mapping class groups for surfaces*, Topology and its appl. **76** (1997), 203–216.
- [KM] N. Kawazumi and S. Morita, *The primary approximation to the cohomology of the moduli space of curves and cocycles for the stable cohomology classes*, Math. Research Lett. **3** (1996), 629–641.
- [Ke] S. P. Kerckhoff, *The Nielsen realization problem*, Ann. Math. **117** (1983), 235–265.
- [Ko] K. Kodaira, *A certain type of irregular algebraic surface*, J. Analyse Math. **19** (1967), 207–215.
- [Mi] E.Y. Miller, *The homology of the mapping class group*, J. Diff. Geom. **24** (1986), 1–14.
- [Mf] T. Morifuji, *The η -invariant of mapping tori with finite monodromies*, Topology and its appl. **75** (1997), 41–49.
- [Mo1] S. Morita, *Characteristic classes of surface bundles*, Inventiones math. **90** (1987), 551–577.
- [Mo2] ———, *Families of Jacobian manifolds and characteristic classes of surface bundles, I*, Ann. Inst. Fourier **39** (1989), 777–810.
- [Mo3] ———, *Families of Jacobian manifolds and characteristic classes of surface bundles, II*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **105** (1989), 79–101.
- [Mo4] ———, *The extension of Johnson’s homomorphism from the Torelli group to the mapping class group*, Invent. math. **111** (1993), 197–224.
- [Mu] D. Mumford, *Towards an enumerative geometry of the moduli space of curves*, Arithmetic and Geometry. Progress in Math. vol. 36, Birkhäuser, Boston, 1983, pp. 271–328.

- [T] U. Tillmann, *A splitting for the stable mapping class group*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (to appear).
- [X1] Y. Xia, *The p -torsion of the Farrell-Tate cohomology of the mapping class group $\Gamma_{(p-1)/2}$* , Topology '90, Proceeding of the Research Semester in Low dimensional Topology at Ohio State University, Walter de Gruyter, Berlin, 1992, pp. 391–398.
- [X2] ———, *The p -torsion of the Farrell-Tate cohomology of the mapping class group Γ_{p-1}* , J. Pure Appl. Alg. **78** (1992), 319–334.

Department of Mathematics, Faculty of Science,
Hokkaido University
Sapporo, 060-0810 Japan
e-mail address: kawazumi@math.sci.hokudai.ac.jp

Department of Mathematics, Faculty of Science,
Hokkaido University
Sapporo, 060-0810 Japan
e-mail address: t-uemura@math.sci.hokudai.ac.jp

境界のある曲面上のタイヒミュラー空間の分割

牛島 顕*

平成十年九月十五日

Abstract

Using the Euclidean decomposition of the hyperbolic surface, R. C. Penner gave a canonical cellular decomposition of the decorated Teichmüller space of a punctured surface, which is invariable under the action of its mapping class group. Adapting his method, we give a canonical cellular decomposition of the Teichmüller space of a compact orientable surface with non-empty boundary.

1 はじめに

R. C. Penner 氏は論文 [Pe] に於て、cusp のある曲面上の decorate されたタイヒミュラー空間を胞体に分割しました。この分割は写像類群の作用で変わらない様に成されていて、これは D. B. A. Epstein 氏との共著論文 [EP] で構成された双曲多様体の canonical decomposition から導かれます。

さて、canonical decomposition の概念は、小島定吉先生の論文 [Ko] に於て全測地的な境界のある場合に拡張されました。そこで、この事と Penner 氏の手法とを合わせる事で、此度新たに境界のある compact な曲面上のタイヒミュラー空間の、写像類群の作用で不変な胞体分割が得られました ([Us])。

2 準備と主定理

種数が g の向き付け可能な曲面から、 r 個の互いに交わらない円板の内部を取り除いて得られる、compact な曲面を $F_{g,r}$ とし、 $2g - 2 + r > 0$ を仮定しておきます。この仮定は、 $F_{g,r}$ に双曲構造が入る事を意味しています。次に、 $F_{g,r}$ のタイヒミュラー空間を $\mathcal{T}_{g,r}$ で表します。先程の仮定から、 $\mathcal{T}_{g,r}$ は $F_{g,r}$ の双曲構造全体を、 $\text{Diff}_0 F_{g,r}$ の作用で割ったものと見做せます。尚、 $\text{Diff}_0 F_{g,r}$ とは、 $F_{g,r}$ に作用する可微分同相写像の内、境界を動かさないホモトピーで恒等写像に移るもの全体が成す群を表しています。また、 $\mathcal{T}_{g,r}$ の元はそれぞれ双曲平面 \mathbf{H}^2 の向きを保つ等長写像全体が成す群の、marked discrete subgroup を定めているので、これを Γ_m で表す事にします。さて $\text{Diff}_0 F_{g,r}$ は、 $F_{g,r}$ に作用する可微分同相写像全体が

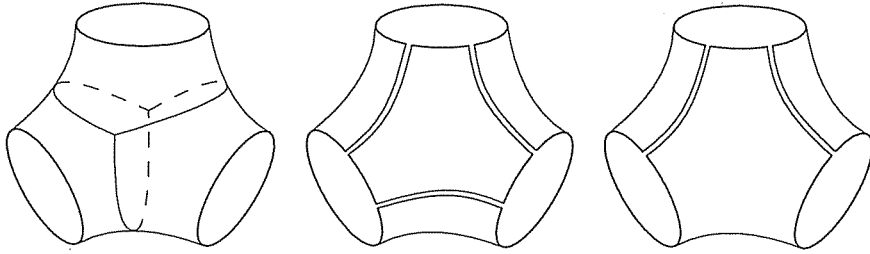
*うしじま あきら; 大阪大学大学院 理学研究科 数学専攻 博士後期課程 二年、
E-mail address: smv001ua@ex.ecip.osaka-u.ac.jp

成す群 $\text{Diff}F_{g,r}$ の正規部分群に成る事が分かります。そこで、 $\text{Diff}F_{g,r}/\text{Diff}_0F_{g,r}$ もまた群になるので、これを $F_{g,r}$ の写像類群と呼び、 $\text{MC}_{g,r}$ で表す事にします。以上についてのより詳しい定義等は、例えば [Ra, Th] をご覧下さい。

さて、 $T_{g,r}$ の元は夫々 $F_{g,r}$ 上に境界が全測地的になる双曲構造を定めますが、この時に $F_{g,r}$ の二つ以上の境界から等距離にある点の集合は、 $F_{g,r}$ の内部でグラフを成します (左端の図参照)。これを **cut locus** と呼びます。そして cut locus の双対として得られる $F_{g,r}$ の分割を、 $T_{g,r}$ の元に対する $F_{g,r}$ の **canonical decomposition** と呼びます (真中の図参照)。この分割は、常に胞体分割に成る事が知られています。

さて $F_{g,r}$ を、境界から生じる辺と、境界どうしを結ぶ弧から生じる辺とが交互に現れる六角形に切り分けるとします。このような分割を生ずる $F_{g,r}$ 内の弧の集合 (の同値類) を $\Delta = (c_1, c_2, \dots, c_q)$ とすると、 $q = 6g - 6 + 3r$ であり、これは $T_{g,r}$ の次元と一致します。このような Δ から得られる $F_{g,r}$ の分割を **truncated triangulation** と呼ぶ事にします。また、 Δ そのものか又は Δ から幾つかの弧を取り除いて得られる $F_{g,r}$ の胞体分割を **truncated cellular decomposition** と呼ぶ事にします (右端の図参照)。勿論、除き過ぎると胞体分割にはなりません。更に、 $F_{g,r}$ の truncated cellular decomposition として Δ を一つ定めた時に、canonical decomposition がこの Δ と位相的に一致する $T_{g,r}$ の元の集合を $\mathring{\mathcal{C}}(\Delta)$ で表す事にします。これらの定義の下で、次の主定理が成り立ちます。

主定理 曲面 $F_{g,r}$ の truncated cellular decomposition として Δ を一つ定める毎に、 $\mathring{\mathcal{C}}(\Delta)$ は、 Δ を定める弧の本数と次元が等しい開球と同相です。また、全ての truncated cellular decomposition に対する $\mathring{\mathcal{C}}(\Delta)$ を集めた集合は、 $T_{g,r}$ の胞体分割となり、更にこの分割は写像類群の作用で変わりません。



3 s -length 座標

$F_{g,r}$ の truncated triangulation として Δ を一つ定め、それが、 $F_{g,r}$ 上の弧 c_i によって $\Delta = (c_1, c_2, \dots, c_q)$ と表されていたとします。ここで、 $q = 6g - 6 + 3r$ です。さて、 $T_{g,r}$ の元 Γ_m を一つ定める毎に、 Γ_m に関する c_i の s -length を次の様に定めます。

$$s(c_i; \Gamma_m) := \sqrt{2} \cosh \frac{d_i}{2} \in \mathbf{R}_s$$

ここで、 d_i は c_i を測地線にした時の双曲平面の意味での長さを表し、 $\mathbf{R}_s = \{t \in \mathbf{R} \mid t > \sqrt{2}\}$ です。この時に、 $s\text{-length}$ を並べる事で $\mathcal{T}_{g,r}$ から \mathbf{R}_s^q への写像 S_Δ が次の様に得られます。

$$S_\Delta(\Gamma_m) := (s(c_1; \Gamma_m), s(c_2; \Gamma_m), \dots, s(c_q; \Gamma_m)) \in \mathbf{R}_s^q$$

そしてこの S_Δ に関して次の定理が成り立ちます。

定理 Δ を $F_{g,r}$ の truncated triangulation とする時に、 S_Δ は同相写像である。

そこで、この $s\text{-length}$ を座標を使って、主定理を証明していきます。

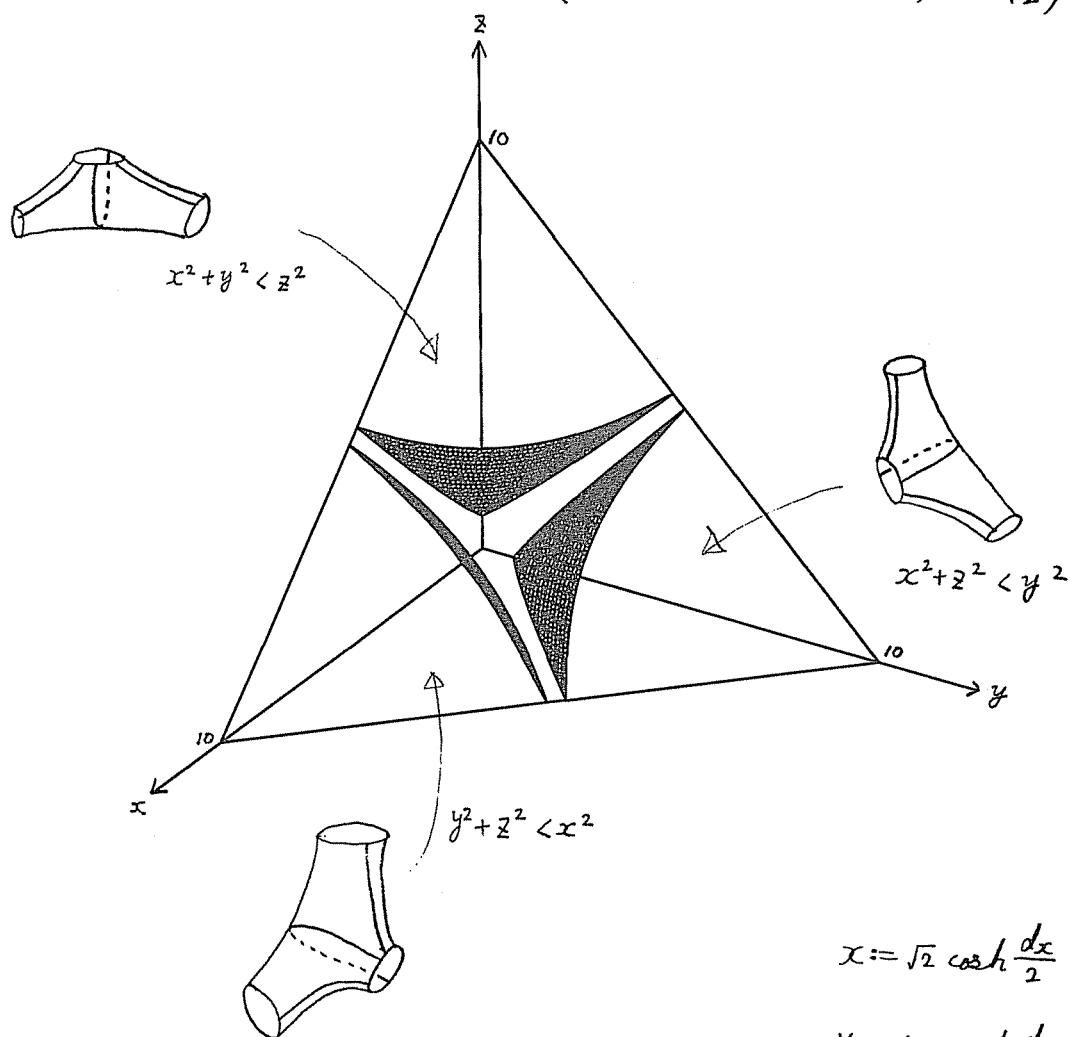
A 付録

次の表は、R. C. Penner 氏の論文 [Pe] 以降の主な関係論文 (の一部) を大まかに表に纏めたものです。

<i>surface</i>	<i>canon. decomp.</i>	<i>Tei. sp.</i>	<i>application</i>
cusped srfc	Epstein & Penner [EP]	Penner [Pe]	Penner etc.
srfc with a point	Näätänen & Penner [NP]	Näätänen [Nä]	Nakanishi & Näätänen [NN]
cpt srfc with bdry	Kojima [Ko]	U. [Us]	...

また、次項の図式は、主定理に至る証明の流れを表しています。そして最後の絵は、 $\mathcal{T}_{0,3}$ の場合の分割を表しています。

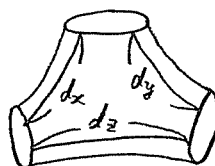
($(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ を中心とする座標軸)



$$x := \sqrt{2} \cosh \frac{dx}{2},$$

$$y := \sqrt{2} \cosh \frac{dy}{2},$$

$$z := \sqrt{2} \cosh \frac{dz}{2}.$$



参考文献

- [EP] D. B. A. Epstein and R. C. Penner, *Euclidean decompositions of noncompact hyperbolic manifolds*, Journal of Differential Geometry **27** (1988), 67–80.
- [Ko] Sadayoshi Kojima, *Polyhedral decomposition of hyperbolic manifolds with boundary*, On the Geometric Structure of Manifolds, edited by Dong Pyo Chi, Proceedings of Workshops in Pure Mathematics, Volume 10, Part III (1990), 37–57.
- [Nä] Marjatta Näätänen, *A cellular parameterization for closed surfaces with a distinguished point*, Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Series A. I. Mathematica **18** (1993), 45–64.
- [NN] Toshihiro Nakanishi and Marjatta Näätänen, *The Teichmüller space of a punctured surface represented as a real algebraic space*, Michigan Mathematical Journal **42** (1995), 235–258.
- [NP] M. Näätänen and R. C. Penner, *The convex hull construction for compact surfaces and the Dirichlet polygon*, Bulletin of the London Mathematical Society **23** (1991), 568–574.
- [Pe] R. C. Penner, *The decorated Teichmüller space of punctured surfaces*, Communications in Mathematical Physics **113** (1987), 299–339.
- [Ra] John G. Ratcliffe, *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, Graduate Texts of Mathematics, **149**, Springer-Verlag, 1994.
- [Th] William P. Thurston, *Three Dimensional Geometry and Topology*, Princeton Mathematical Series, **35**, Princeton University Press, 1997.
- [Us] Akira Ushijima, *A canonical cellular decomposition of the Teichmüller space of a compact surface with boundary*, preprint.

MEYER'S SIGNATURE COCYCLE AND HYPERELLIPTIC FIBRATIONS

(マイヤーの符号数コサイクルと超楕円的ファイブレーション)

遠藤久顕 (阪大理・学振)

1. 序文

Σ_g を向きづけられた種数 g の閉曲面とし、 \mathcal{M}_g を Σ_g の写像類群とします。

Meyer [17][18] は符号数コサイクル (signature cocycle) と呼ばれる \mathcal{M}_g の 2-cocycle $\tau_g: \mathcal{M}_g \times \mathcal{M}_g \rightarrow \mathbb{Z}$ を定義し、曲面上の曲面束の符号数を τ_g を用いて書き下しました。この符号数公式を用いると、 g が 2 以下ならば向きづけられた閉曲面上の Σ_g 束の全空間 E の符号数 $Sign(E)$ は常に 0 であることがわかります。一方、 g が 3 以上の場合は family についての Atiyah-Singer 指数定理から $Sign(E)$ は 4 で割り切れることが知られていますが、Meyer は全ての 4 の倍数がある Σ_g 束についての $Sign(E)$ として実現できることを \mathcal{M}_g の Birman-Hilden 関係子 + いくつかの非自明な関係子を用いて示しました。(\mathcal{M}_g の完全な有限表示である Wajnryb 表示 [26] を用いると、 $Sign(E)$ の全体が $4\mathbb{Z}$ に等しいことが指数定理の助けを借りずに「いっぺんに」わかります [7]。) 種数が 2 以下と 3 以上の場合にこのような違いが現われる原因は符号数コサイクル τ_g のコホモロジー類の $H^2(\mathcal{M}_g, \mathbb{Z})$ における位数の有限性にあります。すなわち、 τ_1 や τ_2 の類は位数有限 (それぞれ 3 と 5) ですが、 g が 3 以上になると τ_g の類は位数 ∞ になってしまうためです。

さて、松本幸夫先生 [13][15] は τ_1 や τ_2 の類の位数有限性を利用して、種数が 1 または 2 の locally analytic fibration の符号数とその各特異ファイバーに「局所集中」することを示されました。つまり、種数が 1 または 2 の locally analytic fibration に現われる特異ファイバーにはその位相型のみからある有理数が定まり、全空間の符号数は全ての特異ファイバーに対するその有理数の総和として回復されます。松本先生はこの有理数を σ -number あるいは fractional signature と呼んでおられますが、我々はこれを局所符号数 (local signature) と呼ぶことにします。松本先生は good torus fibration、楕円曲面、種数 2 の Lefschetz fibration に現われる特異ファイバーに対して局所符号数の値を決定し、Persson [24] や Xiao-Ueno [27][25] の定理をトポロジーの観点から再証明されました。また、互いに同相であるが同型でない (実は後に微分同相でないことが示された [8]) 種数 2 の Lefschetz fibrations の例を構成されました。

種数が 3 以上の場合は τ_g の類がもはや位数有限ではないのでこのような符号数の局所集中は一般には期待できません。この稿では fibration を「超楕円的」なものに限れば種数が 3 以上の場合にもやはり符号数の局所集中が起こることを述べ、Lefschetz 型の特異ファイバーに対する局所符号数の計算結果を紹介したいと思います。また、正の符号数をもつ Lefschetz fibration の例や代数曲面論との関わりについても触れたいと思います。

2. 超楕円的写像類群上の符号数コサイクル

ここでは、符号数コサイクルを超楕円的写像類群上に制限するとそのコホモロジー類の位数が有限になることを述べ、符号数コサイクルを cobound する 1-cochain の計算を紹介します。

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}\text{-}\mathcal{T}\mathcal{E}\mathcal{X}$

まず、符号数コサイクルは次のように定義されます。
 シンプレクティック行列 $A, B \in Sp(2g, \mathbb{Z})$ に対して、ベクトル空間 $V_{A,B}$ を

$$V_{A,B} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2g} \times \mathbb{R}^{2g} \mid (A^{-1} - I)x + (B - I)y = 0\}$$

と定義します。ここで I は単位行列です。 $V_{A,B}$ 上の（退化しうる）対称双線型形式

$$\langle \ , \ \rangle_{A,B} : V_{A,B} \times V_{A,B} \longrightarrow \mathbb{R}$$

を次で定義します：

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle_{A,B} := \langle x_1 + y_1, (I - B)y_2 \rangle,$$

$$(x_i, y_i) \in V_{A,B} \quad (i = 1, 2)$$

ここで、 $\langle \ , \ \rangle$ は \mathbb{R}^{2g} 上の標準シンプレクティック形式：

$$\langle x, y \rangle = {}^t x J y \quad (x, y \in \mathbb{R}^{2g})$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \in M_{2g}(\mathbb{R})$$

です。符号数コサイクル [17][18]

$$\tau_g : Sp(2g, \mathbb{Z}) \times Sp(2g, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

は

$$\begin{aligned} \tau_g(A, B) &:= \text{sign}(V_{A,B}, \langle \ , \ \rangle_{A,B}) \\ &\quad (A, B \in Sp(2g, \mathbb{Z})) \end{aligned}$$

と定義されます。Novikov の加法性から τ_g は $Sp(2g, \mathbb{Z})$ の 2-cocycle となります。

次に曲面の写像類群について簡単に復習しておきます。
 種数 g の向きづけられた閉曲面 Σ_g は図 1 のように \mathbb{R}^3 の中に軸に関して対称な形に埋め込まれているとし、 $Y_1, \dots, Y_g, U_1, \dots, U_g, Z_1, \dots, Z_{g-1}$ を図 1 にあるような Σ_g 上の単純閉曲線とします。また、図の軸に関する 180 度回転 $\iota : \Sigma_g \longrightarrow \Sigma_g$ を超楕円的対合（hyperelliptic involution）と呼びます。

Σ_g の写像類群（mapping class group） \mathcal{M}_g とは Σ_g の向きを保存する微分同相の isotopy 類全体のなす群です。また、 Σ_g の超楕円的写像類群（hyperelliptic mapping class group） \mathcal{H}_g とは超楕円的対合 ι の isotopy 類と可換な元全体のなす \mathcal{M}_g の部分群です。

これらの群の生成元については次のことが知られています。

定理 2.1 (Lickorish [12], Birman-Hilden [5]).

- (1) 群 \mathcal{M}_g は図 1 の $3g - 1$ 個の単純閉曲線 $Y_1, \dots, Y_g, U_1, \dots, U_g, Z_1, \dots, Z_{g-1}$ に沿った負の Dehn ツイスト $y_1, \dots, y_g, u_1, \dots, u_g, z_1, \dots, z_{g-1}$ で生成される。
- (2) 群 \mathcal{H}_g は $2g + 1$ 個の元 $y_1, u_1, z_1, u_2, \dots, z_{g-1}, u_g, y_g$ で生成される \mathcal{M}_g の部分群である。（定義関係子も書き下せる。）特に、 $g = 1, 2$ ならば $\mathcal{H}_g = \mathcal{M}_g$ である。

さて、 $H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z})$ のシンプレクティック基底を適当に選ぶと表現 $\sigma : \mathcal{M}_g \longrightarrow Sp(2g; \mathbb{Z})$ が一つ定まります。この σ による τ_g の引き戻し $\sigma^* \tau_g = \tau_g \circ (\sigma \times \sigma)$ をやはり τ_g と書くことにします。また、この τ_g の \mathcal{H}_g への制限 $\tau_g \circ (\sigma \times \sigma)|_{\mathcal{H}_g \times \mathcal{H}_g}$ を τ_g^H と書くことにします。

Birman-Hilden 関係子に対する符号数コサイクル τ_g^H の計算と Meyer による 2-cocycle のコホモロジー類の位数判定法を合わせると次のことがわかります。

命題 2.2. 種数 g の超楕円の写像類群 \mathcal{H}_g 上に制限された符号数コサイクル τ_g^H のコホモロジー類の $H^2(\mathcal{H}_g, \mathbb{Z})$ における位数はちょうど $2g+1$ である。従って、次の性質をもつ関数

$$\phi_g : \mathcal{H}_g \longrightarrow \frac{1}{2g+1}\mathbb{Z} \quad (g \geq 1)$$

が唯一つ存在する：

- (1) $\tau_g^H(x, y) = \phi_g(x) + \phi_g(y) - \phi_g(xy)$
- (2) $\phi_g(1) = 0$
- (3) $\phi_g(x^{-1}) = -\phi_g(x)$
- (4) $\phi_g(yxy^{-1}) = \phi_g(x)$

ここで、 x, y は \mathcal{H}_g の元である。

種数 1 及び 2 の場合の位数有限性は超楕円の写像類群のもつ性質が現われたものとして捉えることができます。

系 2.3 (Meyer [18]). $[\tau_1]$ の $H^2(\mathcal{M}_1, \mathbb{Z})$ における位数は 3 であり、 $[\tau_2]$ の $H^2(\mathcal{M}_2, \mathbb{Z})$ における位数は 5 である。

この節の最後に類関数 ϕ_g の具体的な計算結果を紹介します。

図 1 の Σ_g 上に $g-1$ 個の単純閉曲線 Q_1, \dots, Q_{g-1} を図 2 のようにとります。 $Q_h (h=1, \dots, g-1)$ に沿った負の Dehn ツイストを $q_h (h=1, \dots, g-1)$ と書き、種数 h の BSCC map と呼びます。

命題 2.4. Lickorish 生成元 $y_1, u_1, z_1, u_2, \dots, z_{g-1}, u_g, y_g$ や種数 h の BSCC map $q_h (h=1, \dots, g-1)$ についての関数 ϕ_g の値は次のようになる：

$$\phi_g(y_i) = \phi_g(u_i) = \phi_g(z_j) = \frac{g+1}{2g+1} \quad (i=1, \dots, g, j=1, \dots, g-1)$$

$$\phi_g(q_h) = -\frac{4h(g-h)}{2g+1} \quad (h=1, \dots, g-1)$$

命題 2.4 の Lickorish 生成元についての関数 ϕ_g の値は森藤孝之さん（東大数理）が筆者とは独立に計算されています [20][21]。また、BSCC map についての値の計算に関してもよりエレガントな計算法を筆者にお教え下さいました。

3. 超楕円のファイブレーションの局所符号数

ここでは、松本先生の方法 [15] に従って超楕円的なファイブレーションの特異ファイバーに対し局所符号数を定義し、いくつかの例を紹介します。用語の定義などの詳しい記述は松本先生の論文 [15] を御覧ください。

$f: M \longrightarrow B$ を種数 g の locally analytic fibration とし、 b_1, \dots, b_n を f の臨界値とします。基点 $b_0 \in \text{Int } B - \{b_1, \dots, b_n\}$ を一つとり、向きを保存する微分同相 $\Phi: \Sigma_g \longrightarrow F_0$ を一つ固定して $F_0 := f^{-1}(b_0)$ と Σ_g を同一視します。このとき Φ に付随する f のモノドロミー表現

$$\rho: \pi_1(B - \{b_1, \dots, b_n\}, b_0) \longrightarrow \mathcal{M}_g$$

が定まります。

ここで、多少安直かも知れませんが次の定義をします。

定義 3.1. 種数 g の locally analytic fibration $f: M \rightarrow B$ が hyperelliptic (「超楕円的」) であるとは、上記の向きを保存する微分同相 $\Phi: \Sigma_g \rightarrow F_0$ をうまくとると Φ に付随する f のモノドロミー表現 ρ の像 $Im \rho$ が超楕円の写像類群 \mathcal{H}_g に含まれるようにできることである。

種数 g の locally analytic fibration に現われるファイバーの位相的同値類全体の集合を \mathcal{S}_g と書き、そのうちの hyperelliptic なもの全体のなす部分集合を \mathcal{S}_g^H と書くことにします。

定理 3.2. 次の性質をみたす関数

$$\sigma_g: \mathcal{S}_g^H \rightarrow \frac{1}{2g+1}\mathbb{Z} \quad (g \geq 1)$$

が唯一つ存在する：

- (1) $F \in \mathcal{S}_g^H$ が非特異ならば、 $\sigma_g(F) = 0$ である。
- (2) $f: M \rightarrow B$ を閉曲面 B 上の種数 g の locally analytic fibration とし、 F_1, \dots, F_n をその全ての特異ファイバーとすると、

$$Sign(M) = \sum_{i=1}^n \sigma_g(F_i)$$

が成り立つ。

ここで、 $Sign(M) (\in \mathbb{Z})$ は M の符号数である。 $\sigma_g(F_i)$ を特異ファイバー F_i の局所符号数 (local signature) と呼ぶ。

証明は松本先生によるものとほぼ同様ですが、一意性が成り立つことを注意しておきます。局所符号数 $\sigma_g(F_i)$ は具体的には

$$\sigma_g(F_i) := -\phi_g(\alpha_i) + Sign(\text{fibered neighborhood of } F_i)$$

と定義されます。但し、 $\alpha_i \in \mathcal{H}_g$ は F_i の周りのモノドロミーです。 α_i のとり方には共役のぶんだけ ambiguity がありますが、 ϕ_g が類関数であるので上式は well-defined です。

さて、次に Lefschetz 型の特異ファイバーの局所符号数を決定します。種数 g の Lefschetz 型の特異ファイバーの位相形はちょうど $\lfloor \frac{g}{2} \rfloor + 1$ 個あり、それを I 型、 $II_h (h = 1, \dots, \lfloor \frac{g}{2} \rfloor)$ 型と名付けます。これらは皆、hyperelliptic であり、モノドロミーはそれぞれ非分離単純閉曲線、種数 h の分離単純閉曲線に沿った負の Dehn ツイストです。

命題 2.4 の計算と局所符号数の定義から次が容易にわかります。

定理 3.3. Lefschetz 型の特異ファイバーの局所符号数の値は次の通りである：

$$\sigma_g(I) = -\frac{g+1}{2g+1}, \quad \sigma_g(II_h) = \frac{4h(g-h)}{2g+1} - 1 \quad (h = 1, \dots, \lfloor \frac{g}{2} \rfloor).$$

特に、 g が 3 以上ならば $\sigma_g(II_h) (h = 1, \dots, \lfloor \frac{g}{2} \rfloor)$ は常に正の値をとります。

この計算から hyperelliptic Lefschetz fibration の特異ファイバーの本数は次のような束縛を受けることがわかります。

命題 3.4. $f: M \rightarrow B$ を閉曲面 B 上の種数 g の *hyperelliptic Lefschetz fibration* とし、 $a, b_1, \dots, b_{[\frac{g}{2}]}$ をそれぞれ $I, II_1, \dots, II_{[\frac{g}{2}]}$ 型の *Lefschetz 型特異ファイバー* の本数とする。このとき次が成り立つ：

$$(1) \quad (g+1)a - 4 \sum_{h=1}^{[\frac{g}{2}]} h(g-h)b_h \equiv 0 \pmod{2g+1}$$

$$(2) \quad a + 4 \sum_{h=1}^{[\frac{g}{2}]} h(2h+1)b_h \equiv 0 \pmod{\begin{cases} 2(2g+1) & (g: \text{even}) \\ 4(2g+1) & (g: \text{odd}) \end{cases}}.$$

また、hyperelliptic Lefschetz fibration は複素多様体に対する Noether の条件に相当するものをみちます。

命題 3.5. $f: M \rightarrow B$ を閉曲面 B 上の種数 g の *hyperelliptic Lefschetz fibration* とするとき、 $\text{Sign}(M) + e(M)$ は 4 で割り切れる。但し、 $e(M)$ は M の Euler 標数である。

この節の最後に正の符号数をもつような Lefschetz fibration の具体例を記述したいと思います。

例 3.6. $g \geq 3$ とする。モノドロミー $(y_1 u_1)^6 (= q_1)$ をもつ II_1 型の特異ファイバーを $2g+1$ 本集めると、その全モノドロミーは $(y_1 u_1)^{6(2g+1)}$ になる。 $\mathcal{H}_g / [\mathcal{H}_g, \mathcal{H}_g]$ の位数は $4(2g+1)$ の約数であるから $(y_1 u_1)^{6(2g+1)}$ は $[\mathcal{H}_g, \mathcal{H}_g]$ に含まれる。従って、ある $k(>0)$ が存在して $(y_1 u_1)^{6(2g+1)}$ は \mathcal{H}_g の k 個の交換子の積として書けるので、種数 k の閉曲面 B 上の種数 g の Lefschetz fibration $f: M \rightarrow B$ であって II_1 型の特異ファイバーを $2g+1$ 本もつものが得られる。このとき、

$$\begin{aligned} \text{Sign}(M) &= (2g+1)\sigma_g(II_1) = (2g+1) \times \left(\frac{4(g-1)}{2g+1} - 1 \right) \\ &= 2g-5. \end{aligned}$$

となる。(具体的な k の値としては $k = 3(2g+1)(6g-1)$ がとれる。)

局所符号数を用いることによって、松本先生による互いに同相だが同型でない Lefschetz fibrations の例も $g \equiv 1 \text{ or } 2 \pmod{4}$ なる一般の g において一般化できます。松本先生が提出された種数 2 の場合は Fuller [8] によって微分同相でないことが示されていますが、他の場合にも同様にして微分同相でないことが証明できるのかどうかは筆者にはわかりません。

4. もうひとつの局所符号数

この節では主に複素のカテゴリーで議論をします。

(holomorphic な) hyperelliptic fibration に対しては我々の方法とは全く異なる方法で局所符号数が定義できることが指摘されています。(この節の内容を解説することは門外漢の筆者には大変荷が重いことです。)

まず、鍵となるのは次の定理です。

定理 4.1 (Horikawa [10], Persson [23]). $f: S \rightarrow C$ を相対的極小な種数 g の (holomorphic) hyperelliptic fibration とし、 C を種数 π のコンパクトな Riemann 面、 F_1, \dots, F_n を全ての特異ファイバーとする。このとき、各特異ファイバー $F_i (i = 1, \dots, n)$ に対して Horikawa index と呼ばれる非負有理数 $Ind(F_i) \in \frac{1}{g}\mathbb{Z}$ が定まり、次の等式が成り立つ：

$$K_S^2 = \frac{4(g-1)}{g} \{ \chi + (g+1)(\pi-1) \} + \sum_{i=1}^n Ind(F_i)$$

ここで、 K_S はコンパクト複素曲面 S の canonical bundle であり、 χ は S の holomorphic Euler-Poincaré characteristic である。

足利正先生（東北学院大工）と荒川達也さん（阪大理）は上の式の K_S や χ をトポロジカルな不変量で書き換えると自然に局所符号数が出現することを見い出されました [2]。

命題 4.2 (Arakawa-Ashikaga [2]). $f: S \rightarrow C$ を相対的極小な種数 g の (holomorphic) hyperelliptic fibration とし、 C を種数 π のコンパクトな Riemann 面、 F_1, \dots, F_n を全ての特異ファイバーとする。このとき、

$$Sign(S) = \sum_{i=1}^n \hat{\sigma}_g(F_i)$$

が成り立つ。ここで、

$$\hat{\sigma}_g(F_i) = \frac{gInd(F_i) - (g+1)\epsilon(F_i)}{2g+1} \in \frac{1}{2g+1}\mathbb{Z}$$

であり、これを特異ファイバー F_i の局所符号数 (local signature) と呼ぶ。
($\epsilon(F_i) := e(F_i) - e(\Sigma_g)$ は F_i の Euler contribution である。)

混乱を避けるため、我々の局所符号数 σ_g を σ_g^{top} 、Arakawa-Ashikaga の局所符号数 $\hat{\sigma}_g$ を σ_g^{hol} と書き、それぞれ topological な、holomorphic な局所符号数と呼ぶことにします。

次の問いはごく自然なものに思えます。

問題 4.3. (holomorphic な) hyperelliptic fibration の特異ファイバーに対して、2 種類の局所符号数 σ_g^{top} 、 σ_g^{hol} は常に等しいか？もしそうでないなら一致するのはどういう場合か？

この問いに関して現時点では次の部分的解答を得ています。

命題 4.4. F を相対的極小な種数 $g (\geq 1)$ の (holomorphic な) hyperelliptic fibration の特異ファイバーとする。もし、 $g \leq 4$ であるかもしくは $Ind(F) = 0$ であれば $\sigma_g^{top}(F) = \sigma_g^{hol}(F)$ である。

この命題の証明は atomic fiber (「原子ファイバー」) に対して実際に二つの値を比較して等しいことを主張するという方法を採用しています。しかし、この方法は足利先生と荒川さんの論文 [2] の type II という特異ファイバーのクラスがあまりにも複雑なため、すべての場合について完遂するのは難しそうです。しかも、二つの局所符号数の一致が何故起こるのかという「からくり」については何も語ってくれません。この辺の事情を明らかにするには特異ファイバーの形状とそのモノドロミーとの間の関係 (松本先生と Montesinos 氏の共同研究のようなこと) をもう少し詳しくみる必要があるのかもしれませんが、勉強不足の筆者にはよくわかりません。

REFERENCES

- [1]. T. Arakawa, *Fission and degenerate hyperelliptic curves of genus two, three and four*, preprint.
- [2]. T. Arakawa and T. Ashikaga, *Local splitting families of hyperelliptic pencils I*, preprint.
- [3]. T. Ashikaga, *A remark on the geography with birational canonical morphisms*, Math. Ann. **290** (1991), 63–76.
- [4]. W. Barth, C. Peters and A. Van de Ven, *Compact Complex Surfaces*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3 Folge, Bd 4, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1984.
- [5]. J. Birman and H. Hilden, *On mapping class groups of closed surfaces as covering spaces*, Advances in the Theory of Riemann Surfaces, Ann. Math. Stud. 66, Princeton Univ. Press, 1971, pp. 81–115.
- [6]. K. S. Brown, *Cohomology of Groups*, Graduate Texts in Math. 87, Springer-Verlag, 1982.
- [7]. H. Endo, *A construction of surface bundles over surfaces with non-zero signature*, to appear in Osaka J. of Math.
- [8]. T. Fuller, *Diffeomorphism types of genus 2 Lefschetz fibrations*, preprint, University of Texas (1996).
- [9]. R. Z. Goldstein and E. C. Turner, *Applications of topological graph theory to group theory*, Math. Z. (1979), 1–10.
- [10]. E. Horikawa, *Algebraic surfaces of general type with small c_1^2* , J. Fac. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **28** (1981), 745–755.
- [11]. D. Johnson, *An abelian quotient of the mapping class group \mathcal{I}_g* , Math. Ann. **249** (1980), 225–242.
- [12]. W. B. R. Lickorish, *A finite set of generators for the homotopy group of 2-manifold*, Proc. Camb. Phil. Soc. **60** (1964), 769–778.
- [13]. Y. Matsumoto, *On 4-manifolds fibered by tori II*, Proc. Japan Acad. **59** Ser. A (1983), 100–103.
- [14]. Y. Matsumoto, *Diffeomorphism type of elliptic surfaces*, Topology **25** (1986), 549–563.
- [15]. Y. Matsumoto, *Lefschetz fibrations of genus two - a topological approach -*, Proceedings of the 37th Taniguchi Symposium on Topology and Teichmüller Spaces held in Finland, ed. S. Kojima et al., World Scientific Publ., 1996, pp. 123–148.
- [16]. G. Mess, *The Torelli groups for genus 2 and 3 surfaces*, Topology **31** (1992), 775–790.
- [17]. W. Meyer, *Die Signatur von lokalen Koeffizientensystemen und Faserbündeln*, Bonner Mathematische Schriften **53** (1972).
- [18]. W. Meyer, *Die Signatur von Flächenbündeln*, Math. Ann. **201** (1973), 239–264.
- [19]. B. Moishezon, *Complex surfaces and connected sums of complex projective planes*, Lect. Notes in Math., vol. 603, Springer, 1977.
- [20]. T. Morifuji, *Meyer's function, η -invariants and the signature cocycle*, thesis, University of Tokyo (1998).
- [21]. T. Morifuji, *On Meyer's function of hyperelliptic mapping class groups*, preprint.
- [22]. S. Morita, *Characteristic classes of surface bundles*, Invent. Math. **90** (1987), 551–577.
- [23]. U. Persson, *Genus two fibrations revisited*, Lect. Notes in Math., vol. 1507, Springer, 1992, pp. 133–144.
- [24]. U. Persson, *On Chern invariants of surfaces of general type*, Compositio. Math. **43** (1981), 3–58.
- [25]. K. Ueno, *Discriminants of curves of genus 2 and arithmetic surfaces*, Algebraic Geometry and Commutative Algebra in honor of M. Nagata, Kinokuniya, 1987, pp. 749–770.
- [26]. B. Wajnryb, *A simple presentation for the mapping class group of an orientable surface*, Israel J. Math. **45** (1989), 157–174.
- [27]. G. Xiao, *Surfaces fibrées en courbes de genre deux*, Lect. Notes in Math., vol. 1137, Springer, 1985.

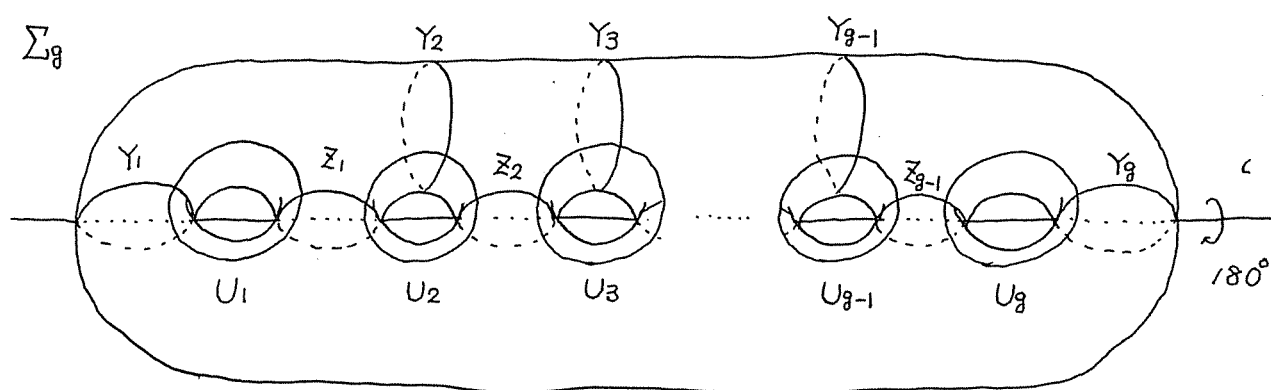


图 1

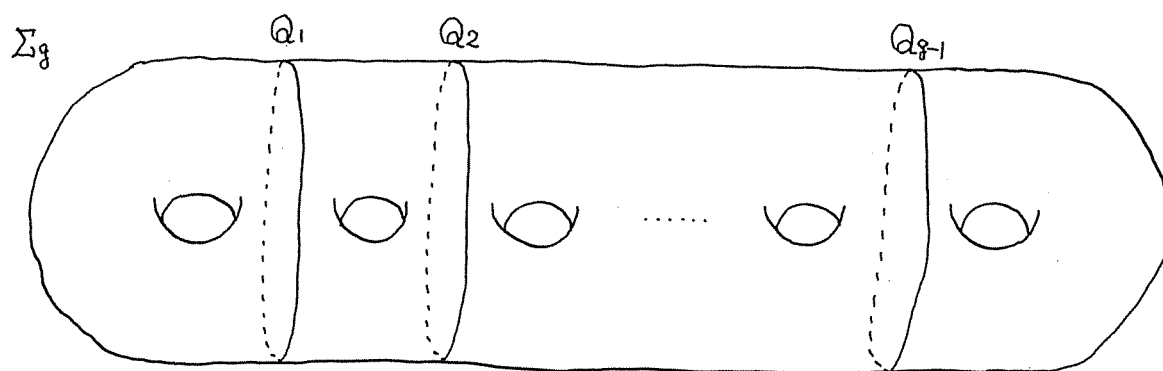


图 2

DIPOLES AND PROJECTIVE STRUCTURES ON RIEMANN SURFACES

YOSHITAKE HASHIMOTO¹ AND KIYOSHI OHBA²

1. Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka City University, Sugimoto, Sumiyoshi-ku, Osaka 558-8585, Japan
(e-mail : hashimoto@sci.osaka-cu.ac.jp)
2. Department of Mathematics, Faculty of Science, Ochanomizu University, Ohtsuka, Bunkyo-ku, Tokyo 112-0012, Japan
(e-mail : ohba@math.ocha.ac.jp)

It is shown by easy calculation that

$$\frac{d}{dz} \left\{ \frac{f'(a)}{f(z) - f(a)} - \frac{1}{z - a} \right\} \Big|_{z=a} = -\frac{1}{6} \left\{ \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2 \right\} (a). \quad (1)$$

The right-hand side is $-1/6$ times of the Schwarzian derivative of f .

In this note we consider the geometric meaning of this formula. Schwarzian derivatives are closely related to projective structures on Riemann surfaces [1, §9]. We construct a one-to-one correspondence between projective structures and certain families of *dipoles*. Here we mean by dipole a meromorphic differential on a Riemann surface with just one pole, which is of residue 0 and of order 2. This correspondence is a by-product of a series of the authors' studies on dipoles [2], [3].

1. STATEMENT

Let X be a compact Riemann surface of genus $g > 0$ and P a point on it. Put

$$E_{n,P} = H^0(X, \Omega^1(nP)).$$

For $-1 \leq n \leq 2$ the dimension of $E_{n,P}$ is dependent only on g, n :

$$\dim E_{-1,P} = g - 1, \quad \dim E_{0,P} = \dim E_{1,P} = g, \quad \dim E_{2,P} = g + 1.$$

We obtain from them holomorphic vector bundles $E_{-1}, E_0 = E_1, E_2$ on X , and an exact sequence

$$0 \rightarrow E_0/E_{-1} \rightarrow E_2/E_{-1} \rightarrow E_2/E_1 \rightarrow 0. \quad (2)$$

Lemma. $\mathcal{O}(E_0/E_{-1}) \cong \Omega^1$, $\mathcal{O}(E_2/E_1) \cong (\Omega^1)^*$.

Proof. The former isomorphism is induced by the restriction $H^0(X, \Omega^1) \rightarrow \Omega^1|_P$. The latter is induced by the residue pairing

$$H^0(X, \Omega^1(2P)) \otimes \Omega^1|_P \rightarrow \mathbb{C} : dg \otimes dz \mapsto \text{Res}_P(gdz).$$

□

The extension of Ω^1 by $(\Omega^1)^*$ is always trivial because

$$H^1(X, \text{Hom}((\Omega^1)^*, \Omega^1)) = H^1(X, (\Omega^1)^{\otimes 2}) = 0.$$

Thus $\mathcal{O}(E_2/E_{-1}) \cong \Omega^1 \oplus (\Omega^1)^*$, but the isomorphism is not canonical. The set of splittings of (2) is the affine space modeled on $H^0(X, (\Omega^1)^{\otimes 2})$.

Now we state the main result :

Theorem. *The splittings of the short exact sequence (2) correspond by one-to-one to projective structures on X .*

2. PROOF

Let $\{(U_\alpha, z_\alpha)\}$ be a projective structure on X , i. e. a local coordinate system such that

$$z_\alpha \circ z_\beta^{-1} : z_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow z_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

is given by a projective transformation on $P_1(\mathbb{C})$, a linear fractional transformation, the Schwarzian derivative of which vanishes. Two projective structures on X are defined to be equivalent iff the union is also a projective structure.

The difference of two projective structures on X can be measured by Schwarzian derivatives. Let $\{(U_\alpha, z_\alpha)\}, \{(U_\alpha, w_\alpha)\}$ be projective structures, and $w_\alpha = f_\alpha(z_\alpha)$. The Schwarzian derivative

$$\left\{ \frac{f_\alpha'''}{f_\alpha'} - \frac{3}{2} \left(\frac{f_\alpha''}{f_\alpha'} \right)^2 \right\} (z_\alpha)(dz_\alpha)^2$$

defines a global quadratic differential. Hence the set of projective structures on X is shown to be the affine space modeled on $H^0(X, (\Omega^1)^{\otimes 2})$.

For $P \in U_\alpha$, the formula (1) implies that the subspace of $E_{2,P}/E_{-1,P}$ spanned by a dipole

$$d\left(\frac{1}{z_\alpha - z_\alpha(P)}\right) \mod E_{-1,P}$$

is independent of the choice of α . It induces a splitting of (2).

The formula (1) also implies the correspondence above is equivariant with respect to the action of $H^0(X, (\Omega^1)^{\otimes 2})$. Hence the correspondence is one-to-one. \square

Remark. a) Splittings of (2) are induced by complimentary spaces of $H^0(X, \Omega^1)$ in $H^1(X, \mathbb{C})$, e. g. g -dimensional subspaces on which the pseudo-Hermitian form

$$\omega \mapsto \frac{i}{2}(\omega \cap \bar{\omega})[X]$$

is negative semi-definite.

b) The formula (1) appears essentially in N. Kawazumi's paper on complex analytic Gel'fand-Fuks cohomology [4, p.666].

REFERENCES

- [1] R. C. Gunning, *Lectures on Riemann Surfaces*, Princeton University Press, 1966.
- [2] Y. Hashimoto and K. Ohba, *Cutting and pasting of Riemann surfaces with Abelian differentials*, preprint, Universität Bielefeld 96-069, 1996.
- [3] ———, *On a certain cell decomposition of a Riemann surface associated to a meromorphic differential*, preprint, 1998.
- [4] N. Kawazumi, *On the complex analytic Gel'fand-Fuks cohomology of open Riemann surfaces*, Ann. Inst. Fourier **43** (1993), pp. 655-712.

SU(2)-representations of the genus 2 surface group and Plücker embedding.

Takayuki Okai (岡井孝行)

§0. Preliminaries.

Let Σ_2 be the closed surface of genus 2. We fix a system of generators of $\pi_1(\Sigma_2)$; $\pi_1(\Sigma_2) = \langle \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \mid [\alpha_1, \beta_1] \cdot [\alpha_2, \beta_2] = 1 \rangle$. Our main concern is the space of SU(2)-representations of $\pi_1(\Sigma_2)$, denoted by $\text{Hom}(\pi_1(\Sigma_2), \text{SU}(2)) / \text{conj.}$. For $\rho \in \text{Hom}(\pi_1(\Sigma_2), \text{SU}(2))$, after a conjugation of SU(2), we may assume that $\rho([\alpha_1, \beta_1]) = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$ with some $\theta \in [0, \pi]$. Let us consider a subspace

$$\begin{aligned} \text{Rep}(\theta) &= \{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) \in (\text{SU}(2))^4 \mid [\alpha_1, \beta_1] = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}, [\alpha_2, \beta_2] = \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}\} / \text{conj.} \\ &\subset \text{Hom}(\pi_1(\Sigma_2), \text{SU}(2)) / \text{conj.} \end{aligned}$$

In [O3], this space $\text{Rep}(\theta)$ (for $0 < \theta < \pi$) is investigated in detail, using the explicit formula of representations. In particular, $\text{Rep}(\theta)$ (for fixed $\theta \in (0, \pi)$) has a structure of an S^1 -bundle over $S^2 \times S^2$ (its transition functions can be given explicitly). But its parametrization seems somewhat artificial. We also want to see more clearly how the space $\text{Rep}(\theta)$ varies as θ moves. For these reasons, we present here another description of the space $\text{Rep}(\theta)$.

§1. Solution space parametrized by Plücker embedding.

Let us identify SU(2) with Sp(1) by $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mapsto a - bj$. Then the equation $[\alpha, \beta] = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$ can be written as $\alpha\beta\alpha^{-1} = e^{i\theta}\beta$. Generalizing this,

we consider a set $E(p, q) = \{x \in Sp(1) \mid xp x^{-1} = q\}$ for $p, q \in Sp(1)$. By the identification $\mathbb{H} \ni x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k \longleftrightarrow \vec{x} = \sum_{l=0}^3 x_l \vec{e}_l \in \mathbb{R}^4$, we regard the equation $xp = qx$ as a linear equation $Q(p, q) \vec{x} = \vec{0}$ for $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$, where

$$Q(p, q) = \begin{pmatrix} p_0 - q_0 & -p_1 + q_1 & -p_2 + q_2 & -p_3 + q_3 \\ p_1 - q_1 & p_0 - q_0 & p_3 + q_3 & -p_2 - q_2 \\ p_2 - q_2 & -p_3 - q_3 & p_0 - q_0 & p_1 + q_1 \\ p_3 - q_3 & p_2 + q_2 & -p_1 - q_1 & p_0 - q_0 \end{pmatrix}.$$

Then we have the identification $E(p, q) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid Q(p, q) \vec{x} = \vec{0}\} \cap S^3 = \text{Ker } Q(p, q) \cap S^3$, where S^3 is the unit sphere in \mathbb{R}^4 .

Let us assume that $p, q \in Sp(1)$ satisfy $p_0 = q_0$ and $\text{Im}(p) \neq 0 \neq \text{Im}(q)$, because $p_0 \neq q_0$ implies $\text{Ker } Q(p, q) = \{\vec{0}\}$ and $p = q = \pm 1$ implies $\text{Ker } Q(p, q) = \mathbb{R}^4$. Now a case-by-case calculation shows the following

Lemma. For any $p, q \in Sp(1)$ with $p_0 = q_0$ and $\text{Im}(p) \neq 0 \neq \text{Im}(q)$, we have $\text{rank } Q(p, q) = 2$. \square

Thus $\dim \text{Ker } Q(p, q) = 2$ and $E(p, q) = S^1$ (a great circle in S^3). Next we investigate how the 2-plane $\text{Ker } Q(p, q)$ varies in \mathbb{R}^4 as p and q move: A 2-plane spanned by linearly independent vectors $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^4$ is parametrized by $[\vec{u} \wedge \vec{v}] \in P(\wedge^2 \mathbb{R}^4)$ (the Plücker coordinate). Let us introduce the (\pm) self-dual 2-vectors $f_l^{(\pm)} = \vec{e}_0 \wedge \vec{e}_l \pm *(\vec{e}_0 \wedge \vec{e}_l) \in \wedge^2 \mathbb{R}^4$ ($l=1, 2, 3$). Then we have the following

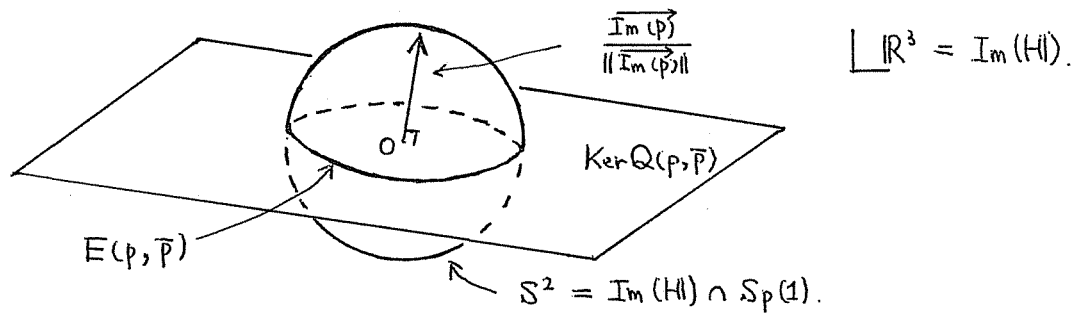
Theorem 1. For any $p, q \in Sp(1)$ with $p_0 = q_0$ and $\text{Im}(p) \neq 0 \neq \text{Im}(q)$, the Plücker coordinate of $\text{Ker } Q(p, q)$ with respect to the basis $\{f_l^{(\epsilon)}\}_{\substack{\epsilon=+, - \\ l=1, 2, 3}} \subset \wedge^2 \mathbb{R}^4$ is given by $\begin{bmatrix} \overrightarrow{\text{Im}(q)} \\ \overrightarrow{\text{Im}(p)} \end{bmatrix}$, where $\overrightarrow{\text{Im}(q)} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$.

Thus we have $GM(2, \mathbb{R}^4) \ni \text{Ker } Q(p, q) \mapsto [\sum_{\ell=1}^3 q_\ell f_\ell^{(+)} + \sum_{\ell=1}^3 p_\ell f_\ell^{(-)}] \in \mathbb{P}(\wedge^2 \mathbb{R}^4)$ via the Plücker embedding and this gives the motion of the solution space $E(p, q)$ with respect to p and q .

Remark. $\{\text{Ker } Q(p, q) \mid p, q \in Sp(1), p_0 = q_0, \text{Im}(p) \neq 0 \neq \text{Im}(q)\}$ covers the set $GM(2, \mathbb{R}^4)$; its Plücker relation in $\mathbb{P}(\wedge^2 \mathbb{R}^4)$ is $\sum_{\ell=1}^3 p_\ell^2 = \sum_{\ell=1}^3 q_\ell^2$.

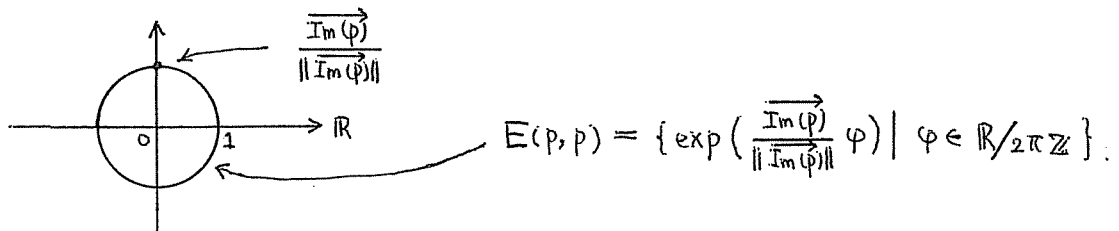
Proof of Theorem 1. Our proof is divided into 3 cases :

(1). The case $q = \bar{p}$. (Note that this includes the case $p, q \in \text{Im}(H\mathbb{I}) \cap Sp(1)$ and $q = -p$, i.e. $[x, p] = -1$.) We have $\text{Ker } Q(p, \bar{p}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \vec{x} \in \{0\} \times \mathbb{R}^3, \overrightarrow{\text{Im}(p)} \cdot \overrightarrow{\text{Im}(x)} = 0\} = (\text{the orthogonal complement of } \overrightarrow{\text{Im}(p)} = \sum_{\ell=1}^3 p_\ell \vec{e}_\ell \text{ in } \mathbb{R}^3 = \text{Im}(H\mathbb{I}))$.



Thus via the Hodge star operator on \mathbb{R}^3 , $\text{Ker } Q(p, \bar{p})$ is identified with $[p_1 \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 + p_2 \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 + p_3 \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2] \in \mathbb{P}(\wedge^2 \mathbb{R}^4)$, which is rewritten as $[\sum_{\ell=1}^3 (-p_\ell) f_\ell^{(+)} + \sum_{\ell=1}^3 p_\ell f_\ell^{(-)}]$.

(2). The case $q = p$. (This includes the case $[x, p] = 1$, from which we can obtain information about $\text{Rep}(0)$.) We have $\text{Ker } Q(p, p) = \langle \vec{e}_0, \overrightarrow{\text{Im}(p)} \rangle_{\mathbb{R}}$.



Now $\vec{e}_0 \wedge \overrightarrow{\text{Im}(p)} = \sum_{\ell=1}^3 p_\ell \vec{e}_0 \wedge \vec{e}_\ell = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^3 p_\ell (f_\ell^{(+)} + f_\ell^{(-)})$ and thus $\text{Ker } Q(p, p)$ is identified with $[\sum_{\ell=1}^3 p_\ell f_\ell^{(+)} + \sum_{\ell=1}^3 p_\ell f_\ell^{(-)}] \in \mathbb{P}(\wedge^2 \mathbb{R}^4)$.

(3). The case $q \neq \bar{p}$ and $q \neq p$. (The following proof is valid also for the case (1).)

Let $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} -(p_1 + q_1) \\ 0 \\ -(p_3 - q_3) \\ p_2 - q_2 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} -(p_2 + q_2) \\ p_3 - q_3 \\ 0 \\ -(p_1 - q_1) \end{pmatrix}$ and $\vec{w}_3 = \begin{pmatrix} -(p_3 + q_3) \\ -(p_2 - q_2) \\ p_1 - q_1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Then by

a direct calculation, we have $\text{Ker } Q(p, q) = \langle \vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3 \rangle_{\mathbb{R}}$. Note that only two of $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ are linearly independent (there is a relation $\sum_{\ell=1}^3 (p_\ell - q_\ell) \vec{w}_\ell = \vec{0}$).

We also have $\vec{w}_1 \wedge \vec{w}_2 = -(p_3 - q_3) \{ \sum_{\ell=1}^3 q_\ell f_\ell^{(+)} + \sum_{\ell=1}^3 p_\ell f_\ell^{(-)} \}$, $\vec{w}_2 \wedge \vec{w}_3 = -(p_1 - q_1) \{ \sum_{\ell=1}^3 q_\ell f_\ell^{(+)} + \sum_{\ell=1}^3 p_\ell f_\ell^{(-)} \}$ and $\vec{w}_3 \wedge \vec{w}_1 = -(p_2 - q_2) \{ \sum_{\ell=1}^3 q_\ell f_\ell^{(+)} + \sum_{\ell=1}^3 p_\ell f_\ell^{(-)} \}$, which give the conclusion $\text{Ker } Q(p, q) \mapsto [\sum_{\ell=1}^3 q_\ell f_\ell^{(+)} + \sum_{\ell=1}^3 p_\ell f_\ell^{(-)}] \in \mathbb{P}(\wedge^2 \mathbb{R}^4)$. \square

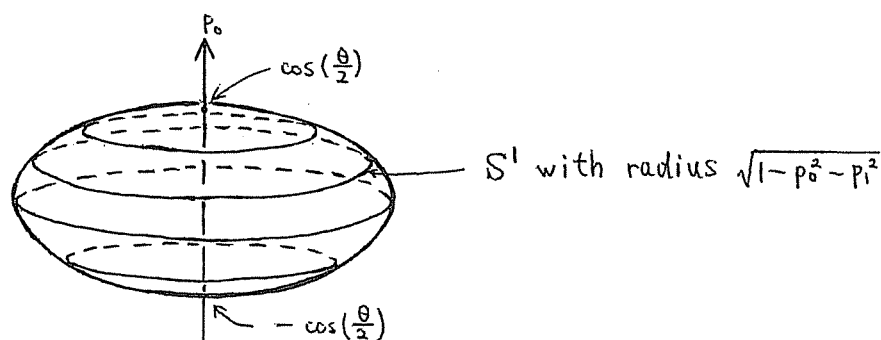
The proof of case (1) has the following application: Given $\beta \in \text{Sp}(1)$, let us consider the equation $[\alpha, \beta] = -1$ for $\alpha \in \text{Sp}(1)$, i.e. the equation $Q(\beta, -\beta)\vec{\alpha} = \vec{0}$. If $\beta_0 \neq 0$, then we have $\text{Ker } Q(\beta, -\beta) = \{\vec{0}\}$. Thus β must belong to $\text{Im}(\text{Hl}) \cap \text{Sp}(1)$, and now we are in the case (1). For any fixed $\beta \in \text{Im}(\text{Hl}) \cap \text{Sp}(1)$, we have $E(\beta, -\beta) = \{ \alpha \in \text{Im}(\text{Hl}) \cap \text{Sp}(1) \mid [\alpha, \beta] = -1 \} = S^1$ and that $E(\beta, -\beta)$ is situated in the equator in $S^2 = \text{Im}(\text{Hl}) \cap \text{Sp}(1)$, if we regard $\beta \in S^2$ as the north pole. Thus the set $\{ (\alpha, \beta) \in (\text{SU}(2))^2 \mid [\alpha, \beta] = -I \}$ is identified with the set $\text{SO}(3)$ of oriented orthonormal basis in \mathbb{R}^3 . Also, the conjugate action of $\text{SU}(2) = \text{Sp}(1)$ on S^2 is nothing but the rotation $\text{SO}(3)$ on S^2 (via $\text{Sp}(1) \ni y \xrightarrow{Ad} (\text{Im}(\text{Hl}) \ni z \mapsto yzy^{-1} \in \text{Im}(\text{Hl})) \in \text{SO}(3)$). Thus we have

Corollary. The space $\{ (\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) \in (\text{SU}(2))^4 \mid [\alpha_1, \beta_1] = -I = [\alpha_2, \beta_2] \} / \text{conj.}$ is identified with the quotient space $\text{SO}(3) \backslash \text{SO}(3) \times \text{SO}(3) (\simeq \text{SO}(3))$, where $\text{SO}(3)$ acts on $\text{SO}(3) \times \text{SO}(3)$ diagonally from left. \square

Remark. For the group $\text{SU}(1, 1)$ instead of $\text{SU}(2)$, there is no (α, β) with $[\alpha, \beta] = -I$ (see [O1], [O2]).

§2. A description of the space $\text{Rep}(\theta)$.

Let us return to the equation $[\alpha, \beta] = e^{i\theta}$. Fix any θ with $0 < \theta < \pi$. Then we have $E(\beta, e^{i\theta}\beta) \neq \emptyset$ (i.e. there exists an $\alpha \in \text{Sp}(1)$ such that $[\alpha, \beta] = e^{i\theta}$) if and only if $\beta \in \{p \in \text{Sp}(1) \mid p_1 = -\tan(\frac{\theta}{2})p_0\}$ (the last constraint comes from the condition that $(\beta)_0 = (e^{i\theta}\beta)_0$; see §1), in which case $E(\beta, e^{i\theta}\beta)$ becomes an S^1 . Here $\{p \in \text{Sp}(1) \mid p_1 = -\tan(\frac{\theta}{2})p_0\}$ is a totally geodesic 2-sphere, denoted by S_θ^2 , which is given by (the hyperplane $p_1 = -\tan(\frac{\theta}{2})p_0$ in \mathbb{H}) $\cap \text{Sp}(1)$. In this S_θ^2 , if we fix a value of p_0 , then the value of p_1 is automatically fixed; thus we consider the image of this S_θ^2 under the projection $(p_0, p_1, p_2, p_3) \xrightarrow{\pi} (p_0, p_2, p_3)$. The following picture shows the decomposition of $\pi(S_\theta^2)$ into orbits of the rotation $\text{SO}(3)$ on $\{p_0\} \times \text{Im}(\mathbb{H})$, which comes from the conjugate action of $\text{Sp}(1)$ on $\text{Sp}(1)$ (Note that the action of $\text{Sp}(1)$ preserves the value p_0 , and thus the value p_1 in S_θ^2):



Among the group $\text{SO}(3)$, only $\{X(\Theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Theta & -\sin \Theta \\ 0 & \sin \Theta & \cos \Theta \end{pmatrix} \mid \Theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\} \cong \text{SO}(2)$

preserves setwisely these orbits (S^1 or point), which are parallel to the plane $\langle \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle_{\mathbb{R}}$. The action of $X(\Theta)$ on $p \in \text{Sp}(1)$ is given by $X(\Theta) \cdot p = e^{i(\frac{\Theta}{2})} p e^{-i(\frac{\Theta}{2})}$.

Let us consider the S^1 -bundle $\bigcup_{\beta \in S_\theta^2} E(\beta, e^{i\theta}\beta)$, which we denote by $E_1(\theta)_{S_\theta^2}$.

Its base space parametrizes β_1 and the fibers parametrize α_1 with $[\alpha_1, \beta_1] = e^{i\theta}$.

The action of $X(\Theta)$ on S_θ^2 lifts to the total space $E_1(\theta)$, because we have

$X(\Theta) \cdot E(\beta_1, e^{i\theta}\beta_1) = E(X(\Theta) \cdot \beta_1, e^{i\theta}X(\Theta) \cdot \beta_1)$. Similarly let $E_2(\theta) =$

種数 2 の曲面の写像類群上のある関数について

笠川 良司

1. 序

種数 g の曲面の写像類群 \mathcal{M}_g のよく知られた $Sp(2g, \mathbb{Z})$ への表現は曲面の一次元コホモロジー群への作用から得られる。この場合の係数群は \mathbb{Z} , より正確に、自明な $\pi_1(\Sigma_g, *)$ -加群 \mathbb{Z} (から得られる局所系) である。ここでは、非自明な $\pi_1(\Sigma_g, *)$ -加群 \mathbb{Z} (から得られる局所系) を考える。準同型 $\pi_1(\Sigma_g, *) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$ は \mathbb{Z}_2 係数一次元コホモロジー類 $w \in H^1(\Sigma_g; \mathbb{Z}_2)$ と同一視出来るので、対応する加群 (又は局所系) を \mathbb{Z}_w と表す。一次元コホモロジー群 $H^1(\pi_1(\Sigma_g, *), \mathbb{Z}_w)$ (曲面は Eilenberg-MacLane 空間なので、以後 $\pi_1(\Sigma_g, *)$ の群のコホモロジー群と Σ_g の特異コホモロジー群を同一視する) への写像類群の作用を考えるのであるが、作用可能なものは基点付き写像類群 \mathcal{M}_{g*} の w を保つ部分群 $\mathcal{M}_{g*}^w = \{f \in \mathcal{M}_{g*} | f^*w = w\}$ である。

\mathcal{K}_{g*} を曲面を二つの連結成分に分ける単純閉曲線に沿った Dehn twist によって生成される \mathcal{M}_{g*} の部分群とする。この部分群は Torelli 群 \mathcal{J}_{g*} に含まれる。ここで Torelli 群とは、整数値係数コホモロジー群に自明に作用する元全体からなる \mathcal{M}_{g*} の部分群である。 \mathcal{M}_g の部分群 \mathcal{K}_g 、Torelli 群 \mathcal{J}_g も同様に定める。これらの部分群は、任意の $w \in H^1(\Sigma_g; \mathbb{Z}_2)$ に対して、 \mathcal{M}_{g*}^w 、 \mathcal{M}_g^w の部分群である。

Proposition 1. 0 でない $w \in H^1(\Sigma_g; \mathbb{Z}_2)$ に対して、 \mathcal{M}_{g*}^w の $H^1(\pi_1(\Sigma_g, *), \mathbb{Z}_w)/\text{torsion}$ への作用は \mathcal{K}_{g*} 上非自明な全射準同型 $\zeta_{g*}^w: \mathcal{M}_{g*}^w \rightarrow Sp(2(g-1), \mathbb{Z})$ を与える。更に、 \mathcal{K}_g 上非自明な全射準同型 $\zeta_g^w: \mathcal{M}_g^w \rightarrow PSp(2(g-1), \mathbb{Z})$ を誘導する。

応用として、種数 2 の場合に、 \mathcal{M}_2^H 上 Meyer 関数の -1 倍に一致する写像類群 \mathcal{M}_2 上の関数を構成する。ここで \mathcal{M}_2^H は $H^1(\Sigma_2; \mathbb{Z}_2)$ 上自明に作用する元全体からなる \mathcal{M}_2 の部分群とする。

$Sp(2, \mathbb{Z}) = SL(2, \mathbb{Z})$ 上の共役不変有理数値関数 ψ で任意の $A, B \in SL(2, \mathbb{Z})$ に対して、 $\sigma(A, B) = \psi(B) - \psi(AB) + \psi(A)$ を満たすものが唯一存在する。ここで σ は $SL(2, \mathbb{Z})$ の signature cocycle である ([1, 5, 7, 9])。 ψ と ζ_{2*}^w を合成することにより関数 $\Psi_*^w: \mathcal{M}_{2*}^w \rightarrow \mathbb{Q}$ を得る。

$f \in \mathcal{M}_{2*}^w$ に対して、曲面束 $M_f \rightarrow S^1$ を $\Sigma_2 \times [0, 1]/(x, 1) \sim (f^{-1}(x), 0)$ で定め、その切断 s を基点から定まるものとする。 $H^1(M_f; \mathbb{Z}_2)$ の元 w_{M_f} で、 $\Sigma_2 = \Sigma_2 \times 0 \hookrightarrow M_f$ 上 w で、切断 s による引き戻しが 0 となるものが一意的に定まる。 w_{M_f} を $\mathbb{Z}_2 = S^0 \subset U(1)$ への準同型と考えることによって、 M_f 上の平坦な複素直線束が得られ、従って、Atiyah-Patodi-Singer ρ -不変量 $\rho_{w_{M_f}}(M_f)$ を得る ([2])。この場合、 $\rho_{w_{M_f}}(M_f)$ は整数値をとる。関数 $\mu_*^w: \mathcal{M}_{2*}^w \rightarrow \mathbb{Q}$ を $\mu_*^w(f) = \rho_{w_{M_f}}(M_f) + \Psi_*^w(f)$ で定める。この関数は \mathcal{M}_2^w 上の関数 μ^w と見なせることが分かる。写像類群 \mathcal{M}_2 上の関数 $\mu: \mathcal{M}_2 \rightarrow \mathbb{Q}$ を $\mu(f) = \frac{1}{15} \sum_w \mu^w$ で定義する。ここで、 $w \in H^1(\Sigma_g; \mathbb{Z}_2)$ は f^* で固定される 0 でない元全体を動く。

Theorem 2. 関数 μ は \mathcal{M}_2 上共役不変であり、 \mathcal{M}_2^H 上、Meyer 関数 ϕ の -1 倍に一致する。

ここで、Meyer 関数 $\phi : \mathcal{M}_2 \rightarrow \mathbb{Q}$ は等式 $\text{sign}(a, b) = -\phi(b) + \phi(ab) - \phi(a)$ で特徴づけられる ([6, 7])。 sign は \mathcal{M}_2 の signature cocycle である。

以下、以上で述べたことを詳しく述べなす。

2. 局所系を係数とする曲面のコホモロジー群

種数 g の有向閉曲面を Σ_g とし、基点 $*$ $\in \Sigma_g$ を固定する。

コホモロジー類 $w \in H^1(\Sigma_g; \mathbb{Z}_2) = \text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g, *), \mathbb{Z}_2)$ を用いて、 $\pi_1(\Sigma_g, *)$ の \mathbb{Z} への作用を

$$\begin{aligned} \pi_1(\Sigma_g, *) \times \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ (\gamma, m) &\mapsto \gamma \cdot m := (-1)^{w(\gamma)} m \end{aligned}$$

で定める。但し $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ と考える。これによって得られる $\pi_1(\Sigma_g, *)$ -加群 \mathbb{Z} を \mathbb{Z}_w で表す。

一次元コホモロジー群 $H^1(\pi_1(\Sigma_g, *), \mathbb{Z}_w)$ は次のようにして計算される ([3])。

w -crossed homomorphism u (即ち、全ての $\alpha, \beta \in \pi_1(\Sigma_g, *)$ に対して、 $u(\alpha\beta) = u(\alpha) + \alpha \cdot u(\beta)$ を満たす) 全体の成す空間を Z^1 とする。principal w -crossed homomorphism v (即ち、 $m \in \mathbb{Z}$ が存在して、全ての $\alpha \in \pi_1(\Sigma_g, *)$ に対して、 $u(\alpha) = \alpha \cdot m - m$ を満たす) 全体の成す空間を B^1 とする。 $H^1(\pi_1(\Sigma_g, *), \mathbb{Z}_w)$ は Z^1/B^1 で計算される。

更に、 $H^1(\pi_1(\Sigma_g, *), \mathbb{Z}_w)/\text{torsion}$ 上には、カップ積と $\mathbb{Z}_w \otimes \mathbb{Z}_w \cong \mathbb{Z}$ と基本類 $[\Sigma_g]$ による評価により、symplectic 形式が定義される。

Lemma 3.

$$H^1(\pi_1(\Sigma_g, *), \mathbb{Z}_w) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^{2g} & w = 0 \\ \mathbb{Z}^{2(g-1)} \oplus \mathbb{Z}_2 & w \neq 0. \end{cases}$$

更に、 $H^1(\pi_1(\Sigma_g, *), \mathbb{Z}_w)/\text{torsion}$ 上の symplectic 形式は 標準的なものである。

\mathcal{M}_{g*} を Σ_g の基点付きの写像類群とする。0 でない $w \in H^1(\Sigma_g; \mathbb{Z}_2)$ に対して、 \mathcal{M}_{g*} の部分群 \mathcal{M}_{g*}^w を w を保つ元全体の成す部分群とする。この部分群は $H^1(\pi_1(\Sigma_g, *), \mathbb{Z}_w)/\text{torsion}$ に作用する。但し、 $f \in \mathcal{M}_{g*}^w$ は $(f^{-1})^*$ で作用するものとする。この作用は先程の symplectic 形式を保つので、 $H^1(\pi_1(\Sigma_g, *), \mathbb{Z}_w)/\text{torsion}$ の symplectic 基底を一組固定することによって、準同型写像

$$\zeta_{g*}^w : \mathcal{M}_{g*}^w \rightarrow \text{Sp}(2(g-1), \mathbb{Z})$$

を得る。

Proposition 1 を示すには、0 でない $w \in H^1(\Sigma_g; \mathbb{Z}_2)$ は同相写像の引き戻しで互いに移りあうので、一つの w についてだけ示せば良い。埋め込み $\Sigma_{g-1,1} := \Sigma_{g-1} \setminus \text{int} D^2 \hookrightarrow \Sigma_g$ に対して、 w として、 $w|_{\Sigma_{g-1,1}} = 0$ となるものを考えると、準同型 $\mathcal{M}_{g-1,1} \rightarrow \mathcal{M}_{g*}^w \rightarrow \text{Sp}(2(g-1), \mathbb{Z})$ が得られるが、これは、 $\mathcal{M}_{g-1,1}$ の $H^1(\Sigma_{g-1}; \mathbb{Z})$ への作用から得られる準同型と一致することが分かるので、Proposition 1 の全射性が従う。ここで、 $\mathcal{M}_{g-1,1}$ は、 $D^2 \subset \Sigma_{g-1}$ 上恒等写像である Σ_{g-1} の写像類群である。 \mathcal{K}_{g*} 上の非自明性は具体例の計算から得られる。基点なしの場合は $\pi_1(\Sigma_g, *) \subset \mathcal{M}_{g*}$ の ζ_{g*}^w による像が $\{\pm I\} \subset \text{Sp}(2(g-1), \mathbb{Z})$ であることから従う。

3. SIGNATURE COCYCLE と \mathcal{M}_{2*}^w 上の関数

先ず $SL(2, \mathbb{Z})$ と $PSL(2, \mathbb{Z})$ 上の関数を導入する。([1, 5, 7, 9])
Rademacher ϕ 関数

$$\phi: PSL(2, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$$

を

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \phi(A) = \begin{cases} \frac{b}{d} & c = 0 \text{ の場合} \\ \frac{a+d}{c} - 12\text{sign}(c)s(a, c) & c \neq 0 \text{ の場合} \end{cases}$$

で定義する。但し $A \in SL(2, \mathbb{Z})$ は $[A] \in PSL(2, \mathbb{Z})$ のリフトとし、

$$s(a, c) := \sum_{k=1}^{|c|-1} \left(\left(\frac{k}{c} \right) \right) \left(\left(\frac{ka}{c} \right) \right)$$

は互いに素な整数 a, c に対する Dedekind sum である。ここで、 x が整数のとき $((x)) = 0$ 、そうでないとき $((x)) = x - [x] - 1/2$ である。

整数値関数

$$\nu: SL(2, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$$

を

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \nu(A) = \begin{cases} \text{sign}(b) & A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{Z}, \text{ の場合} \\ \text{sign}(c(a+d-2)) & \text{その他の場合,} \end{cases}$$

で定義し、有理数値関数

$$\psi: SL(2, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Q}$$

を

$$A \mapsto \psi(A) = -\frac{1}{3}\phi(A) + \nu(A)$$

で定める。

関数 ψ は $\sigma = \delta\psi$ を満たす有理数値関数として特徴づけられる。ここで、

$$\sigma: SL(2, \mathbb{Z}) \times SL(2, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$$

は signature cocycle で、 δ はコバウンダリー作用素である。

一般に $U(p, q)$ の signature cocycle

$$\text{sign}: U(p, q) \times U(p, q) \rightarrow \mathbb{Z}$$

が次のようにして定義される ([1])。

$P := S^2 \setminus \overset{3}{\amalg} \text{int} D^2$ に対して、 $\pi_1(P, *)$ はランク 2 の自由群である。その生成元を α と β とする。任意の二元 $A, B \in U(p, q)$ に対して、 α, β に対応するホロノミーが A, B である P 上の平坦 $U(p, q)$ -ベクトル束を E とする。コホモロジー群 $\hat{H}^1(P; E) := \text{Im}[H^1(P, \partial P; E) \rightarrow H^1(P; E)]$ 上にエルミート積がカップ積と E のエルミート積と基本類 $[P, \partial P]$ による評価で構成される積を i 倍したもので定義される。その指数で $\text{sign}(A, B)$ を定義する。

特に、 $p = q = 1$ の場合、 $SL(2, \mathbb{Z}) \hookrightarrow U(1, 1)$ と見なすと sign の $SL(2, \mathbb{Z})$ への制限は σ と一致する ([1])。従って、 $A, B \in SL(2, \mathbb{Z})$ に対して、

$$\text{sign}(A, B) = \psi(B) - \psi(AB) + \psi(A)$$

が成立する。

X を境界 $\partial X = \coprod_i S_i^1$ を持つコンパクト有向曲面とする。準同型 $\xi: \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\xi'} SL(2, \mathbb{Z}) \hookrightarrow U(1, 1)$ に対して、 ξ^{-1} をホロノミーとして持つ平坦束を E_ξ とする。先程と同様にして、指数 $sign(X, E_\xi)$ が定義される。 X のパンツ分解を考えると、指数加法性により、

$$sign(X, E_\xi) = \sum_i \psi(\xi'(S_i^1))$$

が成立する。ここで、 S_i^1 は $\pi_1(X, x_0)$ の元を表しているが、実際は共役の分だけ決まらない。しかし、 ψ は $SL(2, \mathbb{Z})$ 上共役不変なので、 $\psi(\xi'(S_i^1))$ は一意的に定まっている。

次に $g = 2$ の場合に、 $w \neq 0 \in H^1(\Sigma_2; \mathbb{Z}_2)$ に対して、関数

$$\Psi_*^w: \mathcal{M}_{2*}^w \rightarrow \mathbb{Q}$$

を

$$\Psi_*^w(f) = \psi(\zeta_{2*}^w(f))$$

で定義する。ここで、 ζ_{2*}^w は前節の準同型で、Lemma 3 により、 $H^1(\pi_1(\Sigma_2, *), \mathbb{Z}_w)/torsion$ の正の基底をとることにより、値域は $SL(2, \mathbb{Z})$ となる。 ψ の $SL(2, \mathbb{Z})$ 上共役不変性により、 Ψ_*^w は正の基底に依存せずに定まる。

Lemma 4. 任意の $h \in \mathcal{M}_{2*}$ に対して、 $\Psi_*^w(hfh^{-1}) = \Psi_*^{h^*w}(f)$ が成立する。

4. 曲面束の指数

X を基点 x_0 と境界を持つコンパクト有向曲面とする。

$g \geq 2$ とし、 $\pi: Z \rightarrow X$ を切断 $s: X \rightarrow Z$ を持つ Σ_g 束とする。基点上のファイバー Z_{x_0} を Σ_g と同一視しておく。モノドロミーを考えることにより、準同型

$$h: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \mathcal{M}_{g*}$$

を得る (ここでは、 h^{-1} がモノドロミーを与える)。逆に、 $B\text{Diff}^+(\Sigma_g, *) \simeq K(\mathcal{M}_{g*}, 1)$ ($g \geq 1$) ([8]) より、準同型から曲面束が構成できる。

Lemma 5. $w \neq 0 \in H^1(\Sigma_g; \mathbb{Z}_2)$ とする。上の設定の下で、 $Im\ h \subset \mathcal{M}_{g*}^w$ と仮定する。このとき、 $w_Z|_{\Sigma_g} = w$ と $s^*w_Z = 0$ を満たす $w_Z \in H^1(Z; \mathbb{Z}_2)$ が一意的に存在する。

以後、 $w \neq 0$ と $Im\ h \subset \mathcal{M}_{g*}^w$ を仮定する。

$\pi_1(Z, *)$ -加群 $\mathbb{C}_{w_Z} := \mathbb{Z}_{w_Z} \otimes \mathbb{C}$ を局所系と考える。 $\hat{H}^*(Z; \mathbb{C}_{w_Z}) := Im[H^*(Z, \partial Z; \mathbb{C}_{w_Z}) \rightarrow H^*(Z; \mathbb{C}_{w_Z})]$ 上には、カップ積、 \mathbb{C} 上のエルミート積と基本類 $[Z, \partial Z]$ による評価により、非退化エルミート形式が定義される。その指数を $sign_{w_Z}(Z)$ と表す。

次に、 X 上のエルミート積を持つ平坦ベクトル束 \mathcal{H} を次のように構成する。

$x \in X$ におけるファイバー \mathcal{H}_x は一次元コホモロジー群

$$H^1(\pi_1(\pi^{-1}(x), s(x)); \mathbb{C}_{w_Z}|_{\pi^{-1}(x)}) \cong H^1(\Sigma_g; \mathbb{C}_w) \cong \mathbb{C}^{2(g-1)}$$

で定義し、エルミート積はカップ積と \mathbb{C} 上のエルミート積と曲面の基本類による評価で構成される積を i 倍したもので与える。

この平坦束 \mathcal{H} のホロノミー準同型 (の逆) は

$$\tau: \pi_1(X, x_0) \rightarrow Sp(2(g-1), \mathbb{Z}) \hookrightarrow U(g-1, g-1)$$

と分解し、準同型

$$\pi_1(X, *) \ni \alpha \mapsto (h(\alpha)^{-1})^* \in \text{Aut}(H^1(\Sigma_g; \mathbb{C}_w), i(\cdot \cup \cdot)[\Sigma_g])$$

と一致する。 $\mathcal{H} = E_\tau$ である。

スペクトル系列と前節の sign の式を用いて次を得る。

Lemma 6. 上の設定の下で、 $\text{sign}_{w_Z}(Z) = \text{sign}(X; \mathcal{H}) = \sum_i \Psi_*^w(h(S_i^1))$ が成立する。

次に Atiyah-Patodi-Singer ρ -不変量を復習する ([2])。

一般に、 M を $2l-1$ 次元有向閉リーマン多様体とし、 $\alpha: \pi_1(M) \rightarrow U(n)$ をユニタリー表現とする。 M の偶数次形式上の自己共役作用素

$$D: \Omega^{\text{even}}(M; \mathbb{C}) \rightarrow \Omega^{\text{even}}(M; \mathbb{C})$$

を

$$D(\phi) = i^l (-1)^{p+1} (*d - d*)\phi$$

で定義する。ここで、 ϕ は $2p$ 次形式である。更に、 D は α によって定義されるランク n の平坦複素ベクトル束に値を持つ偶数次形式上の自己共役作用素 D_α に拡張する。作用素 D_α に対して、関数 $\eta_\alpha(s)$ を

$$\eta_\alpha(s) = \sum_{\lambda \neq 0} (\text{sign } \lambda) |\lambda|^{-s}$$

で定義する。ここで、 λ は D_α の 0 でない固有値全体を動く。 D に対するこの関数を $\eta(s)$ で表す。これらの関数は $s = 0$ において有限の値で拡張する。これらの値 $\eta(0)$ 、 $\eta_\alpha(0)$ をリーマン多様体の η -不変量という。

$\tilde{\eta}_\alpha(s) := \eta_\alpha(s) - n\eta(s)$ と置く。

Theorem 7 (Atiyah-Patodi-Singer [2]). $\tilde{\eta}_\alpha(0)$ は計量によらない。従って、 M と α の微分同相不変量となる。この値を $\rho_\alpha(M)$ で表す。 $M = \partial N$ であり、 α は $\pi_1(N)$ のユニタリー表現に拡張するならば、

$$\rho_\alpha(M) = n \text{sign}(N) - \text{sign}_\alpha(N)$$

が成立する。

元の設定に戻って、 X 上の Σ_2 束 $Z \rightarrow X$ の境界 ∂Z の連結成分による分解を $\partial Z = \coprod_i \partial_i Z$ とする。各連結成分 $\partial_i Z$ は X の連結成分 S_i^1 上のモノドロミーが $h(S_i^1)^{-1} \in \mathcal{M}_{2*}^w$ である Σ_2 束である。Theorem 7 を $N = Z$ 、 $M = \partial Z$ 、 $\alpha = w_Z|_{\partial Z}$ に適用し、Lemma 6 を用いると、

$$\begin{aligned} \text{sign}(Z) &= \sum_i \rho_{w_{\partial_i Z}}(\partial_i Z) + \text{sign}_{w_Z}(Z) \\ &= \sum_i \{\rho_{w_{\partial_i Z}}(\partial_i Z) + \Psi_*^w(h(S_i^1))\} \end{aligned}$$

と計算される。

$f \in \mathcal{M}_{2*}$ に対して、 M_f をモノドロミーが f^{-1} である S^1 上の Σ_2 束とする。0 でない $w \in H^1(\Sigma_2; \mathbb{Z}_2)$ に対して、関数

$$\mu_*^w: \mathcal{M}_{2*}^w \rightarrow \mathbb{Q}$$

を

$$\mu_*^w(f) = \rho_{w_{M_f}}(M_f) + \Psi_*^w(f)$$

で定める。この関数を用いると上の等式は

$$\text{sign}(Z) = \sum_i \mu_*^w(h(S_i^1))$$

と書き換えられる。

任意の $a, b \in \mathcal{M}_{2*}$ (又は \mathcal{M}_2) に対して、 $\text{sign}(a, b)$ を α, β に対応するモノドロミーが a, b である P 上の Σ_2 束の指数で定義する。

Lemma 8. 0 でない $w \in H^1(\Sigma_2; \mathbb{Z}_w)$ に対して、関数 μ_*^w は次の性質を持つ。

1. $\mu_*^w(1) = 0$,
2. $\mu_*^w(a^{-1}) = -\mu_*^w(a)$,
3. $\mu_*^w(faf^{-1}) = \mu_*^w(a)$,
4. $\text{sign}(a, b) = \mu_*^w(b) - \mu_*^w(ab) + \mu_*^w(a)$,
5. $\mu_*^w(\alpha f) = \mu_*^w(f\alpha) = \mu_*^w(f)$.

但し $a, b, f \in \mathcal{M}_{2*}^w, \alpha \in \pi_1(\Sigma_g, *) \subset \mathcal{M}_{2*}^w$ とする。

この lemma の 5 により、関数 μ_*^w は \mathcal{M}_2^w 上の関数 μ^w を与える。この関数 μ_w は、対応する Lemma 8 の性質 1-4 を持つ。

\mathcal{M}_2 上の関数

$$\mu: \mathcal{M}_2 \rightarrow \mathbb{Q}$$

を

$$\mu(f) = \frac{1}{15} \sum_{\substack{w \in H^1(\Sigma_2; \mathbb{Z}_2) \setminus \{0\} \\ f^*w=w}} \mu^w(f)$$

で定義する。

この関数 μ も対応する Lemma 8 の性質 1-3 を持ち、性質 4 は $a, b \in \mathcal{M}_2^H$ に制限して成立する。

sign は \mathcal{M}_2 の \mathbb{Z} 上の 2-cocycle を定め、signature cocycle として知られている。更に \mathbb{Q} 上コバウンダリーである。 $H^1(\mathcal{M}_2, \mathbb{Q}) = 0$ という事実より、関数

$$\phi: \mathcal{M}_2 \rightarrow \mathbb{Q}$$

で、性質 $\text{sign}(a, b) = -\phi(b) + \phi(ab) - \phi(a)$ を持つものが一意的に存在する。この関数を Meyer 関数と呼ぶ。Meyer 関数は、 \mathcal{M}_2 上 Lemma 8 の性質 1-3 を持ち、その値は $\frac{1}{5}\mathbb{Z}$ に含まれることが知られている ([6, 7])。

Proposition 9. \mathcal{M}_2^H 上、 $\mu = -\phi$ が成立する。

以上によって、Theorem 2 が得られたことになる。

モノドロミーがすべて Torelli 群 \mathcal{J}_{2*} に含まれる曲面束の指数は 0 であるという事実と Lemma 8 の性質 4 と具体例の計算より次を得る。

Corollary 10. μ_*^w ($w \neq 0$), μ, ϕ は Torelli 群 $\mathcal{J}_{2*}, \mathcal{J}_2$ 上非自明な準同型である。

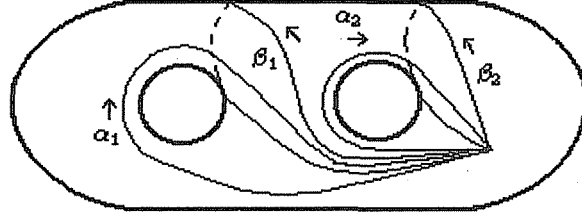


FIGURE 1. $\pi_1(\Sigma_2, *)$ の生成元

5. 例

種数 2 の曲面 Σ_2 の基本群 $\pi_1(\Sigma_2, *)$ の生成元 α_i, β_i ($i = 1, 2$) を Figure 1 で与える。
以下、 $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ と考え、 $w \in H^1(\Sigma_2; \mathbb{Z}_2)$ は $w(\alpha_1) = 1$ を満たすものとする。
 w -crossed homomorphism の空間 $Z^1: = Z^1(\pi_1(\Sigma_2, *), \mathbb{Z}_w)$ の基底 E, F, W として、

$$\begin{aligned} E: (\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) &\mapsto (0, -w(\alpha_2), 0, 1), & F: (\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) &\mapsto (0, w(\beta_2), 1, 0), \\ W: (\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) &\mapsto (w(\alpha_1), w(\beta_1), w(\alpha_2), w(\beta_2)) \end{aligned}$$

がとれる。 $2W$ は principal w -crossed homomorphism の空間 $B^1: = B^1(\pi_1(\Sigma_2, *), \mathbb{Z}_w) \cong 2\mathbb{Z}$ の基底を与える。従って、

$$H^1(\pi_1(\Sigma_2, *), \mathbb{Z}_w) \cong \mathbb{Z}E \oplus \mathbb{Z}F \oplus \mathbb{Z}_2W$$

を得る。

$f: \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ を Figure 2 で与えられる閉曲線に沿った正の Dehn twist で与えられる基点と向きを保つ Σ_2 の同相写像とする。この写像は \mathcal{K}_{2*} に属する。

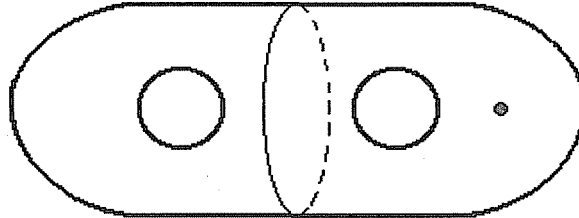


FIGURE 2. f を定める単純閉曲線

誘導準同型 $f_*: \pi_1(\Sigma_2, *) \rightarrow \pi_1(\Sigma_2, *)$ は、

$$\alpha_1 \mapsto l\alpha_1l^{-1}, \quad \beta_1 \mapsto l\beta_1l^{-1}, \quad \alpha_2 \mapsto \alpha_2, \quad \beta_2 \mapsto \beta_2$$

で与えられる。但し、 $l = [\beta_1, \alpha_1]$ とする。

直接計算により誘導準同型

$$f^*: H^1(\pi_1(\Sigma_2, *), \mathbb{Z}_w)/torsion \rightarrow H^1(\pi_1(\Sigma_2, *), \mathbb{Z}_w)/torsion$$

の基底 E, F に関する表現行列は

$$\begin{pmatrix} 1 + 4w(\alpha_2)w(\beta_2) & -4w(\beta_2)^2 \\ 4w(\alpha_2)^2 & 1 - 4w(\beta_2)w(\alpha_2) \end{pmatrix}$$

となる。但し、 $w(\alpha_2) = w(\beta_2) = 0$ の場合は、基底 E, F は負の向きを与えている。更に Ψ_*^w の定義にしたがって計算すると、

$$\Psi_*^w(f^n) = \begin{cases} 0 & \zeta_{2*}^w(f) = id \text{ の場合} \\ -\frac{4}{3}n + \operatorname{sgn}(n) & \text{その他の場合} \end{cases}$$

を得る。

Lemma 11. 任意の $w \in H^1(\Sigma_2; \mathbb{Z}_2)$ に対して、 $\{\rho_{w(M_{f^n})}(M_{f^n}) | n \in \mathbb{Z}\}$ は有界である。

f^n は \mathcal{J}_{2*} に属し、 μ_*^w は Corollary 10 により \mathcal{J}_{2*} 上準同型なので、 $\zeta_{2*}^w(f) \neq id$ のとき、

$$\mu_*^w(f^n) = n\mu_*^w(f) = n(\rho_{w_{M_f}}(M_f) + \Psi_*^w(f)) = n(\rho_{w_{M_f}}(M_f) - \frac{1}{3})$$

を得る。一方、

$$\mu_*^w(f^n) = \rho_{w_{M_{f^n}}}(M_{f^n}) + \Psi_*^w(f^n) = \rho_{w_{M_{f^n}}}(M_{f^n}) - \frac{4}{3}n + \operatorname{sgn}(n)$$

であるので、 $n \rightarrow \infty$ を考えることにより、Lemma 11 に注意して、 $\rho_{w_{M_f}}(M_f) = -1$ 、従って、 $\mu_*^w(f^n) = -\frac{4}{3}n$ と $\rho_{w_{M_{f^n}}}(M_{f^n}) = -\operatorname{sgn}(n)$ を得る。

同様に、 $w(\alpha_1) = 0$ の場合にも計算できる。

結果をまとめると、 $(f^{-1})^*$ が恒等写像でない任意の $w \in H^1(\Sigma_2; \mathbb{Z}_2)$ に対して、 $\mu_*^w(f^n) = -\frac{4}{3}n$ を得る。これは 15 個のうち 9 個あり、他の 6 個に対しては $\mu_*^w(f^n) = 0$ となる。従って、

$$\mu(f^n) = \frac{1}{15} \sum_{\substack{w \in H^1(\Sigma_2; \mathbb{Z}_2) \setminus \{0\} \\ (f^n)^* w = w}} \mu_*^w(f^n) = \frac{1}{15} \cdot 9 \cdot (-\frac{4}{3}n) = -\frac{4}{5}n$$

と計算される。これは、[6] の Corollary 3.7 の結果と一致する。

REFERENCES

- [1] M. F. Atiyah, *The logarithm of the Dedekind η -function*, Math. Ann. 278(1987), 335-380.
- [2] M. F. Atiyah, V. K. Patodi and I. M. Singer, *Spectral asymmetry and Riemannian geometry II*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 78(1975), 405-432.
- [3] K. S. Brown, *Cohomology of groups*, Berlin Heidelberg New York, Springer 1982.
- [4] D. Johnson, *A survey of the Torelli group*, Contemp. Math. 20(1983), 165-179.
- [5] R. Kirby and P. Melvin, *Dedekind sums, μ -invariants and the signature cocycle*, Math. Ann. 299(1994), 231-267.
- [6] Y. Matsumoto, *Lefschetz fibrations of genus two; -a topological approach-*, in Proceedings of the 37th Taniguchi symposium on topology and Teichmüller spaces, ed. by Sadayoshi Kojima et al. 1996, World Scientific Publishing Co. pp123-148.
- [7] W. Meyer, *Die Signatur von Flächenbündeln*, Math. Ann. 201(1973), 239-264.
- [8] S. Morita, *Characteristic classes of surface bundles*, Invent. Math. 90(1987), 551-577.
- [9] R. Sczech, *Dedekind sums and signatures of intersection forms*, Math. Ann. 299(1994), 269-274.

東京都目黒区大岡山 2-12-1、東京工業大学理学部数学科
E-mail address: kasagawa@math.titech.ac.jp

H_1 -bordism classes and the Casson invariant of 3-manifolds from the mapping class group viewpoint

TERUAKI KITANO

14, September in Sapporo

Casson defined a topological invariant for the integral homology 3-spheres which is an lift of the Rochlin invariant. Afterwards Walker extended this invariant to the rational homology 3-spheres, and Lescop did it further to all 3-manifolds. However this extended invariant is zero if the first betti number of a 3-manifold is greater than 3.

On the other hand, Morita gave a description of the original Casson invariant for the integral homology 3-spheres via the mapping class groups. That is, the Casson invariant is a group homomorphism $\lambda : \mathcal{K}_g \rightarrow \mathbb{Z}$ from the subgroup \mathcal{K}_g generated by the Dehn twists along the separating simple closed curves. This is a refinement of the Birman-Craggs homomorphism for the Rochlin invariant.

Recently Moriyama studied the Casson-Walker invariant for the rational homology 3-spheres, on the lines developed by Morita. His result is, roughly speaking, the difference of this invariant from twisting by elements of \mathcal{K}_g , it coincides with the mapping in the case of integral homology 3-spheres. Of course, we cannot obtain all rational homology spheres by twisting by elements of \mathcal{K}_g from a fixed manifold. Moriyama's results suggest to define classes of 3-manifolds which can be obtained one from the other (whether they are in the same class), by the "action" \mathcal{K}_g and define the Casson invariant on each class. Such a class is studied by Cochran-Gerges-Orr in terms of the framed link surgeries. It is just H_1 -bordism classes of 3-manifolds.

In this talk, we use the concept of H_1 -bordism class and discuss one approach to define generalized Casson invariant which is not the same one with the Lescop's one.

Department of Mathematics, Tokyo Institute of Technology,
Oh-okayama, Meguro, 152-8551, Tokyo, Japan.
e-mail : kitano@math.titech.ac.jp

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ - \TeX

Grothendieck の dessin

— 基本的事項から種数 0 の dessin の分岐数と差の積公式

小松 亨

(東京都立大学大学院理学研究科)

- §0. Intro.
- §1. 基本的事項
- §2. Belyi 射の計算例
- §3. 種数 0 の dessin の分岐数と差の積公式
- §4. dessin の例
- §5. 積公式の応用

§ 0. Intro.

Belyi 射によって実現される Grothendieck の dessin と呼ばれるものは幾何的なバランスを持っているように思われる。そこで、今回の講演では、幾何的なバランスを持っていることを積公式という数値的なものによって表わす。また、その積公式のほかに、Grothendieck の dessin について基本的事項から説明して、よく研究されている事項についてもいくつか紹介する。

§ 1. 基本的事項.

Grothendieck の dessin (dessin d'enfant) とは、あるコンパクトな (向きづけ可能な) 位相的曲面上のある種の胞体分割のことである。この dessin とは、以下のように視覚化される。まず、曲面上に有限個の点を取り、それらの点を有限個の辺で結び、それらの点と辺によって、1 つの連結なグラフをつくる。このとき、この連結なグラフが曲面をいくつかの開胞体に分割するようにする。

典型的な例として、球面上の tree などがある。

より正確には、dessin とは、コンパクトな位相的曲面上の有限個の点 (頂点) とそれらを結ぶ有限個の辺であって、以下の 3 つの性質を持っているもののことである。

¹本稿では、“clean” とは限らない一般の dessin を扱うことにする。

- (i) 頂点と辺の合併集合 Γ は連結
- (ii) 頂点と辺の合併集合 Γ は曲面をいくつかの開胞体に分割する
- (iii) 頂点は二部構造を持っている
(i.e., 各頂点は 2 種類の印 (\bullet または \times) を持っていて,
その印は隣接している点同士は, 相異なるようにする.)

“すべての dessin は適当な方法のみで実現可能か?” に関して Grothendieck が以下のような観察をした.

“すべての dessin に対して, ある Riemann 面 X と
3 点分岐の被覆 $\beta: X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ で $\Gamma = \beta^{-1}([0, 1])$
となるようなものと付随させることができる.
しかも, この X と β は $\overline{\mathbb{Q}}$ 上定義されるようにできる.”

この前半部分の精密な組合せ論的な証明は, 1975 年に J. Malgouire と C. Voisin ([MV]) によって示された. また, 殆んど同じ頃に D. Singerman と G. Jones ([JS]) によっても示された. (後半部分は, Riemann の存在定理と Grothendieck の降下理論による)

逆に, Belyi は次の定理を証明した.(1979)

Belyi の定理

“ $\overline{\mathbb{Q}}$ 上のすべての代数曲線 X は, 高々 $\{0, 1, \infty\} \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$
の 3 点の上でしか分岐しない $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の射 $\beta: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ によって実現される.”

定義. Belyi の定理で出てきたような射 β を Belyi 射と呼び, その射を与える $\overline{\mathbb{Q}}$ 係数の有理式 $f(X) (\in \overline{\mathbb{Q}}(X))$ を Belyi 関数と呼ぶ.

与えられた dessin に対して, Belyi 射などを計算する方法は, 初期には, Atkin によって研究された. その方法は dessin を Poincaré 上半平面を $PSL_2(\mathbb{Z})$ の有限指数の部分群で割った商として考えるものであった. 一方, Shabat と Voevodsky ([SV]) が, 簡単な位相的な議論を与えている.

以上のことの他に, Grothendieck は dessin への絶対 Galois 群 $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の作用について研究した. この作用については, 種数 0 という最も単純な場合でさえも, かなり non-trivial である. 例えば, 以下のような例がある. (図 2.1, 2.2, 2.3 は § 2. を参照)

まず, 図 2.1 のような dessin が具象的に与えられたとする. このとき, 絶対 Galois 群 $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の元で, 複素共役の元を考えれば, 図 2.2 が, 図 2.1 と共役であることは直観的にだいたい分かる. 一方, 図 2.3 も図 2.1 (図 2.2) と実際は共役であるが, そうであると言われても直観的にはほとんど分からない.

この3つの dessin たちが、互いに共役であることを示すには、それぞれの Belyi 射を計算しなければならない(だろう). そこで、次の節ではこの Belyi 射を計算してみよう.

次の節に入る前に、もう少し絶対 Galois 群 $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ について述べることにする.

絶対 Galois 群 $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ について、種数0の dessin だけに限って研究しても‘ある意味では’、絶対 Galois 群 $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の情報は失われない. というのは、次のような結果があるからである.

H.Lenstra - L.Schneps

“絶対 Galois 群 $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ は、種数0の dessin 全体の集合に忠実に作用する.
さらに、tree 全体の集合にも忠実に作用する.”

§ 2. Belyi 射の計算例.

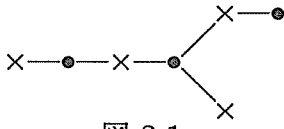


図 2.1

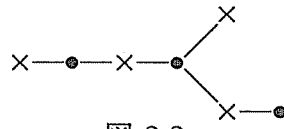


図 2.2

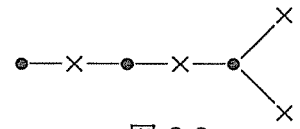


図 2.3

図 2.1 について、Belyi 関数を $f(X) (\in \overline{\mathbb{Q}}(X))$ であるとする. ここで、図 2.1 の場合は $\beta(\infty) = \{\infty\}$ であるので $f(X)$ は多項式、つまり $f(X) \in \overline{\mathbb{Q}}[X]$ になる. また、Belyi 射 β は3点分岐であるが、その3点は、 $\{0, l, \infty\} (l \in \overline{\mathbb{Q}})$ であるとする. (実際、射 $\varphi(X) = X/l$ と合成すれば、3点は $\{0, 1, \infty\}$ にできるので、計算を簡単にするために、このようにしておくことにする.)

$\beta(\bullet) = 0, \beta(\times) = l$ であるとする.

まず、点 \bullet について、

分岐数が3である点 \bullet を $0 (\in \overline{\mathbb{Q}})$ (として dessin の描かれる場所を決めて),

分岐数が2である点 \bullet を $-1 (\in \overline{\mathbb{Q}})$ (として dessin の大きさと向きなどを決めて),

分岐数が1である点 \bullet を $-a (\in \overline{\mathbb{Q}})$ であるとする.

このとき、Belyi 関数 $f(X)$ は

$$f(X) = X^3(X+1)^2(X+a) \quad (2.1)$$

となる.

一方、点 \times について、

分岐数が2である点 \times を $-b_1, -b_2 (\in \overline{\mathbb{Q}}, b_1 \neq b_2)$,

分岐数が1である点 \times を $-b_3, -b_4 (\in \overline{\mathbb{Q}}, b_3 \neq b_4)$ であるとする. このとき、定義から

$$f(X) - l = (X+b_1)^2(X+b_2)^2(X+b_3)(X+b_4) \quad (2.2)$$

となる. 式 (2.1), (2.2) をそれぞれ X で1回微分して比較すると

$$(f'(X) =) X^2(X+1)(6X^2 + (5a+4)X + 3a) = (X+b_1)(X+b_2)g(X) \quad (2.3)$$

ここで $g(X) (= \frac{f'(X)}{(X+b_1)(X+b_2)}) \in \overline{\mathbb{Q}}[X]$ である.

このとき, 射 β の well-defined 性から, $\{0, 1\} \cap \{b_1, b_2\} = \emptyset$ であり, 式 (2.3) から

$$(X + b_1)(X + b_2) = X^2 + \frac{5a+4}{6}X + \frac{1}{2}a \quad (2.4)$$

となる. ここで, 式 (2.2) より, $f(X)$ を X に関して $(X + b_1)(X + b_2)$ で割ったときの余りは $l (\in \overline{\mathbb{Q}})$ (定数) である. 一方, 実際に $f(X) (= X^3(X+1)^2(X+a))$ を X に関して $(X + b_1)(X + b_2) (= X^2 + \frac{5a+4}{6}X + \frac{1}{2}a)$ で割ると, 余りは

$$\frac{(25a^2 - 32a + 16)(25a^3 - 12a^2 - 24a - 16)}{7776}X + \frac{a(5a - 8)(25a^2 - 6a + 8)}{2592}$$

である. したがって

$$(25a^2 - 32a + 16)(25a^3 - 12a^2 - 24a - 16) = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{a(5a - 8)(25a^2 - 6a + 8)}{2592} = l \quad (2.6)$$

である. ここで, 式 (2.5) について, $25a^2 - 32a + 16 = 0$ であるとする式 (2.4) より $(b_1 - b_2)^2 = \frac{25a^2 - 32a + 16}{36} = 0$ となり, $b_1 \neq b_2$ に矛盾する. よって, 式 (2.5) は

$$25a^3 - 12a^2 - 24a - 16 = 0 \quad (2.7)$$

となり, これが数 $a (\in \overline{\mathbb{Q}})$ の満たすべき式になる. また, 式 (2.7) により, 式 (2.6) は

$$l = -\frac{1}{1500}(a^2 + 52a - 32) \quad (2.8)$$

となる. 式 (2.7) を a について解くと

$$a = \frac{1}{25}(\alpha_j^2 + 2\alpha_j + 4), \quad j = 1, 2, 3.$$

ここで数 $\alpha_j (j = 1, 2, 3)$ は, $\alpha^3 = 108 (= 2^2 3^3)$ を満たす数で $Im(\alpha_1) > 0, Im(\alpha_2) < 0, Im(\alpha_3) = 0$ とする.

α_1 のとき, dessin を実際に描いてみると図 2.1 のようになる. (正確なものは図 2.1' を参照) また同様に α_2, α_3 について dessin を実際に描いてみると, α_2 のとき図 2.2 のようになり, α_3 のとき図 2.3 のようになる. (図 2.2', 図 2.3' を参照) ここで, α_j から描かれる dessin を D_j と呼ぶことにする. また, 絶対 Galois 群 $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の元 σ_{j_1, j_2} を $\sigma_{j_1, j_2}(\alpha_{j_1}) = \alpha_{j_2}$ となる元とする. このとき, dessin D_{j_1} に元 $\sigma_{j_1, j_2} (\in Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}))$ を作用させると D_{j_2} になる. したがって, dessin D_1, D_2, D_3 は互いに共役であり, またこれら以外にこれらと共役なものはない.

最後に $\text{dessin } D_1, D_2, D_3$ の Belyi 射と Belyi 関数などをまとめておく.

$$f_j(X) := X^3(X+1)^2(X+a_j), \quad l_j := -\frac{1}{1500}(a_j^2 + 52a_j - 32).$$

ここで, 数 $a_j(\in \overline{\mathbb{Q}})$ は $a_j = \frac{1}{25}(\alpha_j^2 + 2\alpha_j + 4)$, $(j = 1, 2, 3)$ となる数であり,

さらに, 数 $\alpha_j(j = 1, 2, 3)$ は, それぞれの $\text{dessin } D_j(j = 1, 2, 3)$ に対応して

$$\alpha_j^3 = 108 (= 2^2 3^3) \text{ を満たす数で } \text{Im}(\alpha_1) > 0, \text{Im}(\alpha_2) < 0, \text{Im}(\alpha_3) = 0$$

となるものとする. また $\varphi_j(X) := X/l_j$ とする.

このとき, $\text{dessin } D_j(j = 1, 2, 3)$ の Belyi 射 β_j は, Belyi 関数 $\varphi_j \circ f_j$ によって与えられ, 定義体は, $\mathbb{Q}(\alpha_j)(\mathbb{Q}$ 上 3 次 (non-Galois) 拡大) である.

Remark. 上の条件のもとで以下の式が成り立つ.

$$f_j(X) - l_j := (X^2 + \frac{5a_j + 4}{6}X + \frac{1}{2}a_j)^2(X^2 - \frac{2}{3}(a_j - 1)X + \frac{1}{12}(5a_j^2 - 4a_j - 4))$$

§ 3. 種数 0 の dessin の分岐数と差の積公式.

定義 (dessin of genus 0)

複素数体 \mathbb{C} 上の 1 変数有理関数体 $\mathbb{C}(X)$ の定数でない元 $f(X) (= \frac{P(X)}{Q(X)} \in \mathbb{C}(X); P(X), Q(X) \in \mathbb{C}[X]; \deg(P(X)) \geq \deg(Q(X)); \gcd(P(X), Q(X)) = 1)$ に対して Riemann 面 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) (= \mathbb{C} \cup \{\infty\})$ から $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ への射 β を

$$\beta: \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$

$$z \longmapsto f(z)$$

で定義する.

つぎに複素数体 \mathbb{C} の相異なる 2 つの元 $x_+, x_- (\in \mathbb{C})(x_+ \neq x_-)$ に対して複素平面 \mathbb{C} 上の線分 L を

$$L := \{tx_+ + (1-t)x_- \in \mathbb{C} \mid t \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 1\}$$

で定義する. そして, 自然な埋め込み $\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ によって L を $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ に埋め込んだものをあらためて L とする. さらに, この射 β と線分 L に対して以下の 2 条件 (i), (ii) を満たすとする.

(i) $\beta^{-1}(L) (\subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ は, 連結

(ii) $x \in L \setminus \{x_+, x_-\}$ に対して $\sharp(\beta^{-1}(x)) = \deg(P)$

(ここで, $\deg(P)$ は $P(X)$ の X についての次数とする.)

このとき, $D := \beta^{-1}(L)$ を dessin of genus 0 と呼び, 射 β を Belyi 射, 関数 $f(X)$ を Belyi 関数と呼ぶ.

記号

$f(X) (\in \mathbb{C}(X))$ を Belyi 関数, $D (= \beta^{-1}(L))$ を dessin of genus 0 とする.
 また, $L = \{tx_+ + (1-t)x_- \in \mathbb{C} \mid t \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 1\}$ とする.
 まず,

$$\begin{aligned} A_+ &:= \beta^{-1}(x_+), \quad A_- := \beta^{-1}(x_-), \quad A_\infty := \beta^{-1}(\infty) \setminus \{\infty\} \\ m_+ &:= \sharp A_+, \quad m_- := \sharp A_-, \quad m_\infty := \sharp A_\infty, \\ A &:= A_+ \cup A_- \cup A_\infty \end{aligned}$$

とにおいて, $a_{+,i}, a_{-,i}, a_{\infty,i} (\in \mathbb{C})$ を

$$\begin{aligned} A_+ &= \{a_{+,i} \in \mathbb{C} \mid 1 \leq i \leq m_+\} \\ A_- &= \{a_{-,i} \in \mathbb{C} \mid 1 \leq i \leq m_-\} \\ A_\infty &= \{a_{\infty,i} \in \mathbb{C} \mid 1 \leq i \leq m_\infty\} \end{aligned}$$

となるようにおく. さらに, A のそれぞれの元 $a (\in A)$ について
 $a_{+,i} \in A_+$ に対して

$$\begin{aligned} e_{a_{+,i}} (= e_{+,i}) &:= (f(X) - x_+ \text{ の } a_{+,i} \text{ での零点の位数}) \\ & (= \text{ord}_{a_{+,i}}(f(X) - x_+)) \end{aligned}$$

とおき, $a_{-,i} \in A_-$ に対して

$$\begin{aligned} e_{a_{-,i}} (= e_{-,i}) &:= (f(X) - x_- \text{ の } a_{-,i} \text{ での零点の位数}) \\ & (= \text{ord}_{a_{-,i}}(f(X) - x_-)) \end{aligned}$$

とおき, $a_{\infty,i} \in A_\infty$ に対して

$$\begin{aligned} e_{a_{\infty,i}} (= e_{\infty,i}) &:= (Q(X) \text{ の } a_{\infty,i} \text{ での零点の位数}) \\ & (= \text{ord}_{a_{\infty,i}}(Q(X))) \end{aligned}$$

とおく. このとき, $A_+ \cup A_-$ の元 a を dessin D の分岐点と呼び, e_a をその点の分岐数と呼ぶ. さらに, A_+ (または A_-) の元 a から D 内を初めてたどり着く A_- (または A_+) の元 a' までの最短曲線を枝と呼び, これを 1 本と数える. (向きは無視するものとする.)

(i) A_+ の元 $a_+(\in A_+)$ に対して, 有理式 $f_{a_+}(X)(\in \mathbb{C}(X))$ を

$$f_{a_+}(X) := \frac{\prod_{a \in A \setminus \{a_+\}} (X - a)^{e_{a_+}}}{Q(X)}$$

とおく.

(ii) A_- の元 $a_-(\in A_-)$ に対して, 有理式 $f_{a_-}(X)(\in \mathbb{C}(X))$ を

$$f_{a_-}(X) := \frac{\prod_{a \in A \setminus \{a_-\}} (X - a)^{-e_{a_-}}}{Q(X)}$$

とおく.

(iii) A_∞ の元 $a_\infty(\in A_\infty)$ に対して, 有理式 $f_a^+(X), f_a^-(X)(\in \mathbb{C}(X))$ を

$$f_a^+(X) := \sum_{a \in A_+} \frac{e_a}{X - a}, \quad f_a^-(X) := \sum_{a \in A_-} \frac{e_a}{X - a}.$$

とおく.

以上の記号の下で

主定理 (1) $P(X)$ の最高次の係数は h であるとして, 定数 $C(\in \mathbb{C})$ を

$$C := \frac{(x_+ - x_-)(\deg(P) - \deg(Q))}{h}$$

とおく. このとき $A_+ \cup A_-$ の任意の元 $a(\in A_+ \cup A_-)$ に対して

$$f_a(a) = C.$$

(2) $e_a \geq 2$ である A_∞ の任意の元 $a_\infty(\in A_\infty)$ に対して

$$f_a^+(a) = f_a^-(a).$$

Remark. $e_a = 1$ である A_∞ の任意の元 $a_\infty(\in A_\infty)$ に対して

$$f_a^+(a) \neq f_a^-(a).$$

Belyi 関数が多項式のとき, $Q(X) = 1, \deg(Q) = 0$ であるので以下のような結果が得られる.

系.1. Belyi 関数が多項式のとき, $f(X)$ の最高次の係数は h であるとして,
定数 $C(\in \mathbb{C})$ を

$$C := \frac{(x_+ - x_-) \deg(f)}{h}$$

とおく. このとき

(i) A_+ の任意の元 $a_+(\in A_+)$ に対して

$$e_{a_+} \prod_{a \in A \setminus \{a_+\}} (a_+ - a) = C.$$

(ii) A_- の任意の元 $a_-(\in A_-)$ に対して

$$e_{a_-} \prod_{a \in A \setminus \{a_-\}} (a_- - a) = -C.$$

つまり, dessin of genus 0 で Belyi 関数が多項式のとき, その dessin のすべての分岐点について, その点の分岐数に, その点とそれ以外の分岐点とのそれぞれの差の積をかけた値は, ± 1 をかけるずれを除いて一定であるということである.

系.2. dessin of genus 0 で Belyi 関数が多項式のとき, その dessin のすべての分岐点について, その点の分岐数に, その点とそれ以外の分岐点とのそれぞれの距離の積をかけた値は, 一定である。

§ 4. dessin の例.

例.1. $f(X) = X^3(X - 4)$, $x_+ = 0$, $x_- = -27$ とすると

$$f(X) - x_+ = X^3(X - 4), \quad f(X) - x_- = (X - 3)^2(X^2 + 2X + 3)$$

であり図 4.1 のような dessin ができる.(正確なものは図 4.1' を参照)

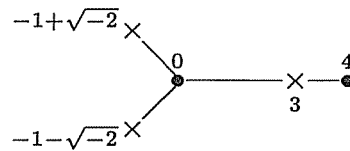


図 4.1

実際に主定理を確かめてみると

$$\begin{aligned} C &= (0 - (-27))(4 - 0)/1 \\ &= 108. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_0(0) &= 3(0 - 4)(0 - 3)(0 - (-1 + \sqrt{2}i))(0 - (-1 - \sqrt{2}i)) \\ &= 108. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3(3) &= -2(3 - 4)(3 - 0)(3 - (-1 + \sqrt{2}i))(3 - (-1 - \sqrt{2}i)) \\ &= 108. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_4(4) &= 1(4 - 3)(4 - 0)(4 - (-1 + \sqrt{2}i))(4 - (-1 - \sqrt{2}i)) \\ &= 108. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{-1+\sqrt{2}i}(-1 + \sqrt{2}i) &= -1(-1 + \sqrt{2}i - 4)(-1 + \sqrt{2}i - 3)(-1 + \sqrt{2}i - 0) \\ &\quad (-1 + \sqrt{2}i - (-1 - \sqrt{2}i)) \\ &= 108. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{-1-\sqrt{2}i}(-1 - \sqrt{2}i) &= -1(-1 - \sqrt{2}i - 4)(-1 - \sqrt{2}i - 3)(-1 - \sqrt{2}i - 0) \\ &\quad (-1 - \sqrt{2}i - (-1 + \sqrt{2}i)) \\ &= 108. \end{aligned}$$

となる.

例.2. $f(X) = \frac{X^3(X - 25)^2}{(X - 16)^2}, \quad x_+ = 0, \quad x_- = -12500$ とすると

$$f(X) - x_+ = \frac{X^3(X - 25)^2}{(X - 16)^2}, \quad f(X) - x_- = \frac{(X + 20)(X^2 - 35X + 400)}{(X - 16)^2}$$

であり図 4.2 のような dessin ができる.(正確なものは図 4.2' を参照)

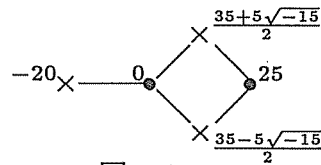


図 4.2

実際に主定理を確かめてみると

$$\begin{aligned} C &= (0 - (-12500))(5 - 2)/1 \\ &= 37500. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_0(0) &= \cdots \\ &= 37500. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{-20}(-20) &= \cdots \\ &= 37500. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{25}(25) &= \cdots \\ &= 37500. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{\frac{35+5\sqrt{-15}}{2}}\left(\frac{35+5\sqrt{-15}}{2}\right) &= \cdots \\ &= 37500. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{\frac{35-5\sqrt{-15}}{2}}\left(\frac{35-5\sqrt{-15}}{2}\right) &= \cdots \\ &= 37500. \end{aligned}$$

となる. また

$$\begin{aligned} f_{16}^+(16) &= \frac{3}{16-0} + \frac{2}{16-25} \\ &= -\frac{5}{144} \\ f_{16}^-(16) &= \frac{1}{16-(-20)} + \frac{2}{16-\frac{35+5\sqrt{-15}}{2}} + \frac{2}{16-\frac{35-5\sqrt{-15}}{2}} \\ &= -\frac{5}{144} \end{aligned}$$

となる.

§ 5. 積公式の応用.

応用.1. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して

$$f(X) = (\cos(n \cdot \arccos(X)))^2, \quad x_+ = 1, \quad x_- = 0$$

とすると

$$\begin{aligned} f(X) - x_+ &= 2^{2n-2} \prod_{k=1}^{2n} (X - \cos(\frac{\pi}{2n} 2k)), \\ f(X) - x_- &= 2^{2n-2} \prod_{k=1}^{2n} (X - \cos(\frac{\pi}{2n} (2k-1))) \end{aligned}$$

であり, 図 5.1 のような dessin ができる.

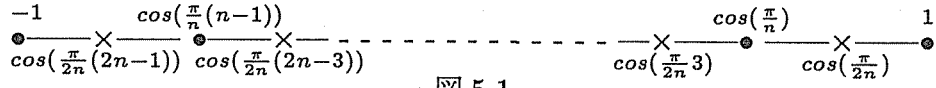


図 5.1

このとき

$$a_{+,k} := \cos\left(\frac{\pi}{2n}(2(k-1))\right) \quad (1 \leq k \leq n+1),$$

$$a_{-,k} := \cos\left(\frac{\pi}{2n}(2k-1)\right) \quad (1 \leq k \leq n)$$

とおくと

$$e_{+,k} = 2 \quad (2 \leq k \leq n),$$

$$e_{-,k} = 2 \quad (1 \leq k \leq n),$$

$$e_{+,1} = e_{+,n+1} = 1$$

となる. また

$$C = \frac{(1-0)2n}{2^{2n-2}} = \frac{n}{2^{2n-3}}$$

である. ここで

$$C_k := \cos\left(\frac{\pi}{2n}k\right) \quad (0 \leq k \leq 2n)$$

とおくと, 主定理から以下のことが分かる.

i : 奇数 ($0 < i < 2n$) に対して

$$-2 \prod_{\substack{0 \leq k \leq 2n \\ k \neq i}} (C_i - C_k) = \frac{n}{2^{2n-3}}.$$

i : 偶数 ($0 < i < 2n$) に対して

$$2 \prod_{\substack{0 \leq k \leq 2n \\ k \neq i}} (C_i - C_k) = \frac{n}{2^{2n-3}}.$$

$i = 0, 2n$ に対して

$$\prod_{\substack{0 \leq k \leq 2n \\ k \neq i}} (C_i - C_k) = \frac{n}{2^{2n-3}}.$$

まとめると

$0 \leq i \leq 2n$ に対して

$$\prod_{\substack{0 \leq k \leq 2n \\ k \neq i}} (C_i - C_k) = \frac{(-1)^i n}{2^{2n-2}}.$$

$i = 0, 2n$ に対して

$$\prod_{0 \leq k \leq 2n} (C_i - C_k) = \frac{C_i n}{2^{2n-2}}.$$

応用.2. (積公式を用いて円分体 $\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})$ の判別式を求める)

$p(\in \mathbb{Z}_{\geq 3})$ 奇素数, $n(\in \mathbb{Z}_{\geq 1})$ 自然数に対して

円分体 $\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})$ の判別式 $d_{p,n} := d(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n}))$ を求める.

まず, 求める判別式は, 定義から Vandermonde 行列式の 2 乗であり

$$d_{p,n} = \left(\prod_{\substack{0 \leq k < j \leq p^n \\ p \nmid jk}} (\zeta_{p^n}^j - \zeta_{p^n}^k) \right)^2. \quad (5.0)$$

であることが分かる. この式を積公式を用いて簡単にする.

dessin D_n として, Belyi 関数を与える有理式 $f_n(X)(\in \overline{\mathbb{Q}})$ と線分 $[x_+, x_-]$ が

$$f_n(X) = X^{p^n}; \quad x_+ = 1; \quad x_- = 0$$

であるものを考える. ここで, $1 \leq j \leq p^n$ に対して

$$f_{n,j} := \zeta_{p^n}^j \prod_{\substack{1 \leq k \leq p^n \\ k \neq j}} (\zeta_{p^n}^j - \zeta_{p^n}^k)$$

と定義する. また, $f_{n,0}$ を

$$f_{n,0} := \prod_{1 \leq k \leq p^n} (-\zeta_{p^n}^k)$$

と定義する. このとき, 積公式から

$$f_{n,j} = \begin{cases} p^n & (1 \leq j \leq p^n \text{ のとき}); \\ -1 & (j = 0 \text{ のとき}). \end{cases} \quad (5.1)$$

同様に $f_{n-1,j}(0 \leq j \leq p^{n-1})$ を定義すると

$$f_{n-1,j} = \begin{cases} p^{n-1} & (1 \leq j \leq p^{n-1} \text{ のとき}); \\ -1 & (j = 0 \text{ のとき}). \end{cases} \quad (5.2)$$

ここで, $m = n, n-1$ と $1 \leq j \leq p^m$ について

$$(-1)^j f_{m,j} := -\zeta_{p^m}^j \prod_{\substack{1 \leq k \leq j \\ k \neq j}} (\zeta_{p^m}^j - \zeta_{p^m}^k) \prod_{\substack{j \leq k \leq p^m \\ k \neq j}} (\zeta_{p^m}^k - \zeta_{p^m}^j).$$

さらに $\zeta_{p^n}, \zeta_{p^{n-1}}$ についての関係式から

$$d_{p,n} = \frac{\prod_{\substack{0 \leq j \leq p^n \\ p \nmid j}} (-1)^j f_{n,j}}{\prod_{\substack{0 \leq j \leq p^n \\ p \mid j}} (-1)^j f_{n,j}} \prod_{0 \leq j \leq p^{n-1}} (-1)^j f_{n-1,j} \quad (5.3)$$

であることが分かる. (Remark 5.3 を参照)

関係式 (5.1), (5.2) を用いると式 (5.3) の右辺は

$$\frac{\prod_{\substack{0 \leq j \leq p^n \\ p \nmid j}} (-1)^j f_{n,j}}{\prod_{\substack{0 \leq j \leq p^n \\ p | j}} (-1)^j f_{n,j}} \prod_{0 \leq j \leq p^{n-1}} (-1)^j f_{n-1,j} = (-1)^{S_{p,n}} p^{T_{p,n}},$$

ここで

$$\begin{aligned} S_{p,n} &= \sum_{\substack{0 \leq j \leq p^n \\ p \nmid j}} j - \sum_{\substack{0 \leq j \leq p^n \\ p | j}} j + \sum_{0 \leq j \leq p^{n-1}} j, \\ T_{p,n} &= \sum_{\substack{0 \leq j \leq p^n \\ p \nmid j}} n - \sum_{\substack{0 \leq j \leq p^n \\ p | j}} n + \sum_{0 \leq j \leq p^{n-1}} (n-1), \end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned} S_{p,n} &\equiv \sum_{\substack{0 \leq j \leq p^n \\ p \nmid j}} j + \sum_{\substack{0 \leq j \leq p^n \\ p | j}} j + \sum_{0 \leq j \leq p^{n-1}} j \pmod{2} \\ &= \sum_{0 \leq j \leq p^n} j + \sum_{0 \leq j \leq p^{n-1}} j \\ &= \frac{p^n(p^n-1)}{2} + \frac{p^{n-1}(p^{n-1}-1)}{2} \\ &\equiv \frac{(p^n-1)}{2} + \frac{(p^{n-1}-1)}{2} \pmod{2} \\ &\equiv \frac{(p^n-1)}{2} - \frac{(p^{n-1}-1)}{2} \pmod{2} \\ &= \frac{p^{n-1}(p-1)}{2} \\ &\equiv \frac{p-1}{2} \pmod{2}; \\ T_{p,n} &= n(p^n - p^{n-1}) - np^{n-1} + (n-1)p^{n-1} \\ &= p^{n-1}(np - n - 1). \end{aligned}$$

以上から

$$d(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p^{p^{n-1}(np-n-1)}.$$

Remark 5.1 [W] では, 円分体 $\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})$ の判別式はだいたい以下のように求める. まず, 式 (5.0) までは同じである. 次に, 素数 p の上の $\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})$ の素 $\text{ideal } \mathfrak{p}$ を考えて, 式 (5.0) の各因子のその素 $\text{ideal } \mathfrak{p}$ での付値を計算する. さらに, p 以外の素数 l に対して, $\text{ideal}(l)$ が $\text{ideal}(\zeta_{p^n}^j - \zeta_{p^n}^k) (1 \leq j, k \leq p^n)$ と互いに素であるという理論を用いて, $d(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n}))$ の素因子には, p 以外の素数 l が出てこないということを使う. 最後に, 符号 (\pm) を決定するのは, $\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})$ の複素数体 \mathbb{C} への埋め込みの組の個数を考えて, 偶数ならば $+$, 奇数ならば $-$ とする.

以上のように多少の知識が必要である. 一方, 応用.2. は積公式を知っていれば, 後は計算だけである.

Remark 5.2 一般の p ベキでない円分体については $\gcd(m, n) = 1$ に対して

$$d(\mathbb{Q}(\zeta_{mn})) = d(\mathbb{Q}(\zeta_m))^{\phi(n)} d(\mathbb{Q}(\zeta_n))^{\phi(m)}$$

であり, これを用いればよい. (ここで, $\phi(n)$ はオイラー関数 (1 以上 n 以下の整数で整数 n と互いに素なものの個数) とする.)

参考文献.

- [S] L.Schneps, The Grothendieck Theory of Dessin d'Enfants, London Math. Soc. Lect. Note Seris 200 (1994).
- [MV] J.Malgoire, C.Voisin, Cartes Cellulaires, Cahiers Mathématiques de Montpellier No. 12, 1977
- [JS] G.Jones, D.Singerman, "Theory of Maps on Orientable surfaces", Proc. London Math. Soc. (3) 37 (1978), 273-307.
- [SV] G.Shabat and V.Voevodsky, "Drawing Curves over Number Fields", The Grothendieck Festschrift, Vol. III. Birkhäuser, 1990.
- [CG] J-M.Couveignes and L.Granboulan, "Dessins from a geometric point of view", London Math. Soc. Lect. Note Seris 200 (1994), 79-113.
- [C] J-M.Couveignes, "Calcul et rationalité de fonctions de Belyi en genus 0", Ann. de l'Inst. Fourier 44 (1), 1994.
- [W] L.C.Washington, Introduction to Cyclotomic Fields, Graduate Text in Math., vol. 83, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1982.

Department of Mathematics, Tokyo Metropolitan University, Minami-Ohsawa
1-1 Hachioji-shi Tokyo, 192-0397 Japan

E-mail address: tkomatu@math.metro-u.ac.jp

Remark 5.3

		非原始 p^n 乗根	原始 p^n 乗根
u		$0 \quad \zeta_{p^n}^{1 \cdot p} \dots \zeta_{p^n}^{p^{n-1} \cdot p}$	$\zeta_{p^n}^1 \dots \dots \zeta_{p^n}^{p^n-1}$
v			
0			
$\zeta_{p^n}^{1 \cdot p}$			
\vdots			
$\zeta_{p^n}^{p^{n-1} \cdot p}$		A	B
$\zeta_{p^n}^1$			
\vdots			
$\zeta_{p^n}^{p^n-1}$		B'	C

	\dots	u	\dots
\vdots		\vdots	
v	\dots	$m_{u,v}$	
\vdots			

$$m_{u,v} := \begin{cases} 1 & (u = v \text{ のとき}) \\ -v & (u = 0, v \neq 0 \text{ のとき}) \\ -u & (u \neq 0, v = 0 \text{ のとき}) \\ v - u & (u = \zeta_{p^n}^{j_1}, v = \zeta_{p^n}^{j_2}, 1 \leq j_1 < j_2 \leq p^n \text{ のとき}) \end{cases}$$

という行列を考える. このとき

$$v(= \zeta_{p^n}^j) \text{ 行の成分の総積} = (-1)^j f_{n,j}$$

$$A(\text{小行列}) \text{ 部分について, } v(= \zeta_{p^n}^{j \cdot p}) \text{ 行の成分の総積} = (-1)^j f_{n-1,j}$$

である. さらに

$$C(\text{部分の成分の}) \text{ 総積} = d_{p,n}$$

$$B \text{ の総積} = B' \text{ の総積}$$

$$C \text{ の総積} = \frac{B' \text{ の総積} \times C \text{ の総積}}{A \text{ の総積} \times B \text{ の総積}} \times A \text{ の総積}$$

であることが分かり, 式 (5.3) が得られる.

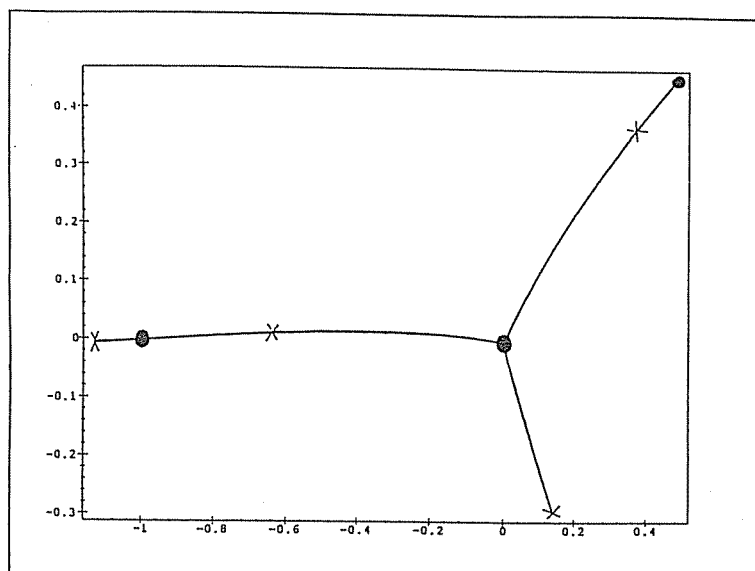


图 2.1'

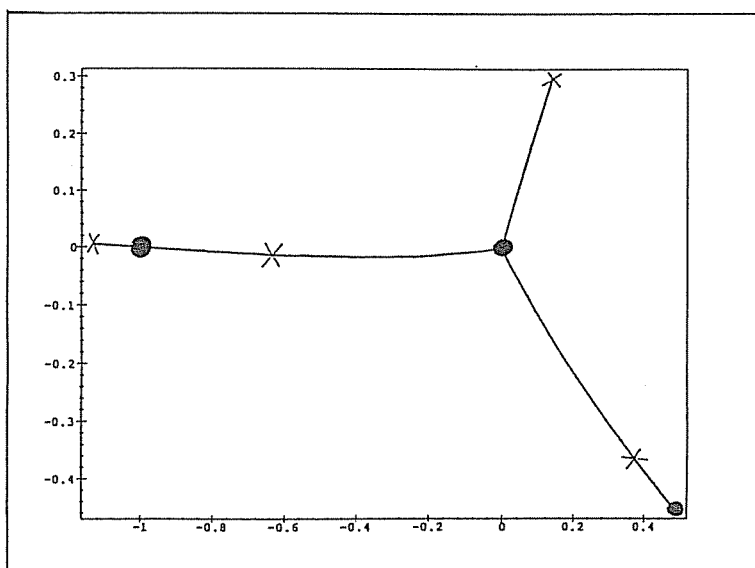


图 2.2'

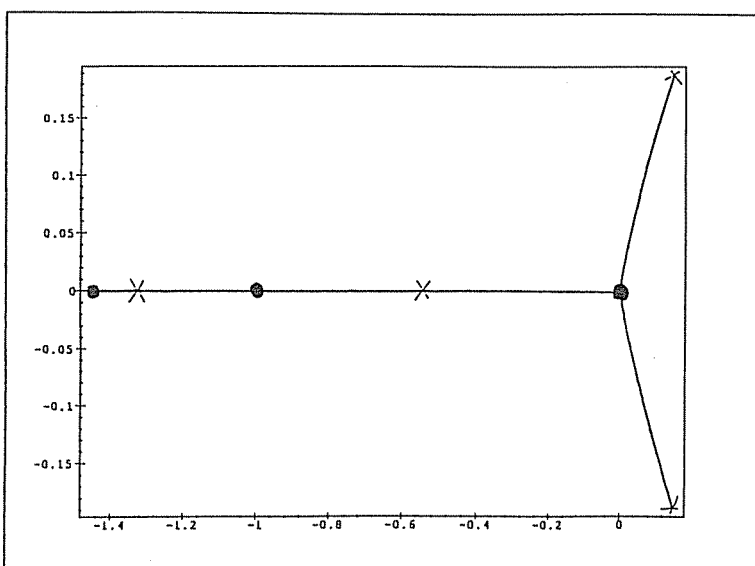


图 2.3'

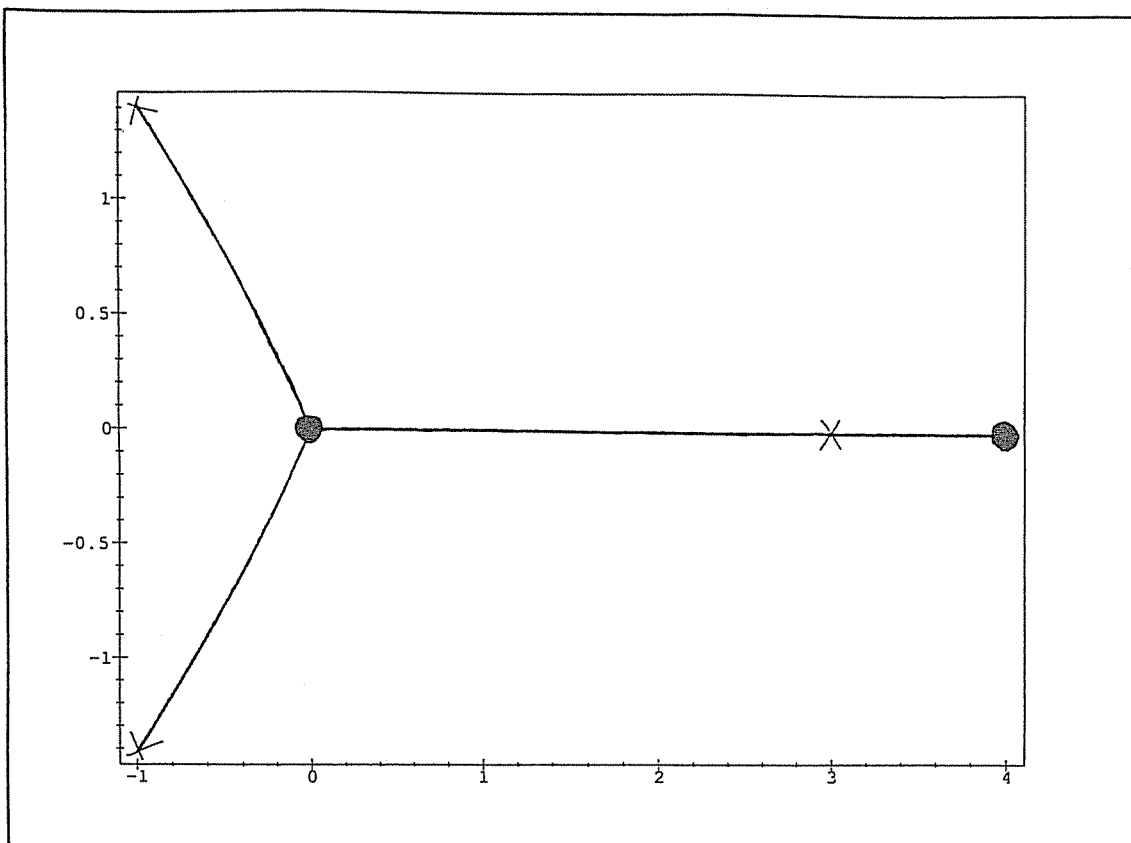


图 4.1'

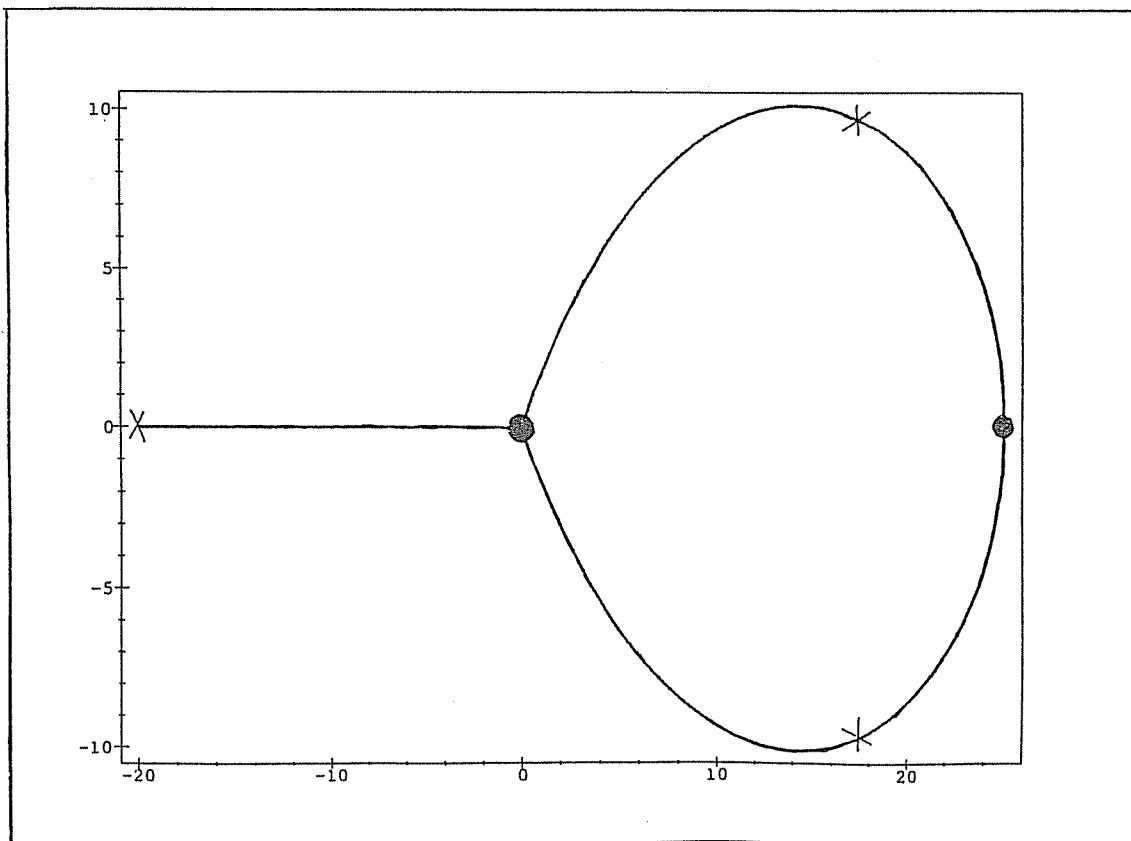


图 4.2'

p -ADIC HODGE THEORY FOR FUNDAMENTAL GROUPS

志甫 淳 (東北大理)

1. 序

本稿では、基本群に対する p 進 Hodge 理論 (クリスタル予想) について紹介する。第2節で \mathbb{C} 上の多様体に対する cohomology 及び基本群に対する Hodge 理論を解説した後、第3節では cohomology に対する p 進 Hodge 理論を述べて、更に主定理である基本群に対するクリスタル予想を述べる。第4節では証明に使われる complex of schemes の概念を紹介して、証明の概略を述べる。

なお、本文では一々断らないが、本稿に出てくる scheme は全て geometrically connected であるとする。

最後に、本稿を書く機会を与えて下さった松本 眞先生と河澄 響矢先生、そして私を励まして下さった方々に感謝致したいと思います。

2. \mathbb{C} 上の HODGE 理論

X を複素多様体とする時、その Betti cohomology (singular cohomology) $H_B^i(X, \mathbb{Q})$ が位相幾何学的に定義される。これは \mathbb{Q} -vector space である。一方、 X を標数0の体 k 上の代数多様体とする時、その (代数的) de Rham cohomology $H_{\text{dR}}^i(X/k)$ が代数的な de Rham complex を用いて定義される。これは k -vector space である。両者の定義の方法は全く異なっているわけであるが、両者は共通して良い性質をもっており、また、次のような比較定理が成り立つ。

Theorem 2.1 (Deligne). X を \mathbb{C} の部分体 k 上の smooth な代数多様体とする時、canonical な同型

$$H_B^i(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \cong H_{\text{dR}}^i(X/k) \otimes_k \mathbb{C}$$

が存在し、また、ここに混合 Hodge 構造が入る。

上の定理の有理基本群での類似を考える。 X を複素多様体、 $x \in X$ とする時、通常の基本群の pro-unipotent completion (Mal'cev completion) $\pi_1^B(X, x)$ が考えられ、これは \mathbb{Q} 上の pro-unipotent 代数群になる。(Deligne による淡中圈を用いた定義も出来る。) ここではこれを Betti 基本群と呼ぶことにする。また、 X を標数0の体 k 上の代数多様体、 $x \in X(k)$ とする時、 X の de Rham 基本群 $\pi_1^{\text{dR}}(X/k, x)$ が定義され、これは k 上の pro-unipotent 代数群になる。(定義は、例えば淡中圈を用いてなされる。)

この時、次のような比較定理が成り立つ。

Theorem 2.2 (Hain, Wojtkowiak). X を \mathbb{C} の部分体 k 上の smooth な代数多様体、 $x \in X(k)$ とする時、canonical な同型

$$\text{Lie } \pi_1^B(X(\mathbb{C}), x \otimes \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \cong \text{Lie } \pi_1^{\text{dR}}(X/k, x) \otimes_k \mathbb{C}$$

が存在し、またここに混合 Hodge 構造が入る。(Lie algebra の演算は混合 Hodge 構造の射になっていることに注意。)

3. p 進 HODGE 理論 (主定理)

p 進 Hodge 理論とは、 p 進体上の代数多様体に対する Hodge 理論の類似である。 p 進 Hodge 理論において Betti cohomology の代わりにするのは etale cohomology であり、de Rham cohomology の代わりにするのは de Rham cohomology と crystalline cohomology である。

まず、記号を以下のように定めておく： k を標数 $p > 0$ の完全体、 W を k の Witt 環、 K_0 をその分数体とする。また、 V を混標数の完備離散付値体で剰余体が k になるものとし、 K をその分数体とする。

X を K 上の代数多様体とし、 X の $\bar{K} (:= K \text{ の代数閉包})$ 上への base change を $X_{\bar{K}}$ と書くことにする。すると $X_{\bar{K}}$ の p -adic etale cohomology $H_{\text{et}}(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p)$ は有限次元 \mathbb{Q}_p -vector space であり、これには K の絶対ガロア群 $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ が作用することが知られている。

一方、 X を k 上 proper smooth な代数多様体とする。この時、crystalline cohomology $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} H_{\text{crys}}^i(X/W)$ が定義される。これは有限次元 K_0 -vector space であり、Frobenius 作用素 φ という自己同型をひきおこす作用素が自然に定義される。また、次が成り立つ。

Theorem 3.1 (Berthelot-Ogus). \tilde{X} を V 上 proper smooth な scheme とし、その special fiber、generic fiber をそれぞれ X , X_K と書くことにする。この時次の canonical な同型がある。

$$H_{\text{crys}}^i(X/W) \otimes_W K \cong H_{\text{dR}}^i(X_K/K).$$

また、普通の Hodge 理論は \mathbb{C} までテンソルすると同型、という感じの定理であったが、 p 進 Hodge 理論で \mathbb{C} の代わりにする環は Fontaine により定義された様々な環になる。ここで紹介するクリスタル予想では、それらのうち、 $B_{\text{crys}} \subset B_{\text{dR}}$ という二つの環が使われる。詳しい定義は省略するが、 B_{crys} は Frobenius 作用素 φ と $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ の作用を持つ K_0 -algebra で、 B_{dR} は filtration $\{\text{Fil}^n B_{\text{dR}}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ と $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ の作用を持つ K 上の完備離散付値体である。

以上の準備のもとで、 p 進 Hodge 理論の結果の一つであるクリスタル予想は次のように述べられる：

Theorem 3.2 (クリスタル予想, Faltings, Tsuji). \tilde{X} を V 上 proper smooth な scheme とし、その special fiber を X , generic fiber を X_K と書く。また、 X_K の \bar{K} 上への base change を $X_{\bar{K}}$ と書く。この時、次の同型がある。

$$H_{\text{et}}^i(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\text{crys}} \cong H_{\text{crys}}^i(X/W) \otimes_W B_{\text{crys}}.$$

上式の両辺への $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ -作用を、左辺は $\sigma \otimes \sigma$, 右辺は $id \otimes \sigma$ ($\sigma \in \text{Gal}(\bar{K}/K)$) で定めると上の同型は $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ -作用と可換で、また上式への Frobenius 作用を、左辺は $id \otimes \varphi$, 右辺は $\varphi \otimes \varphi$ で定めると、上の同型は Frobenius 作用と可換である。また、上の同型を $\otimes_{B_{\text{crys}}} B_{\text{dR}}$ すると、Berthelot-Ogus の定理による同型 $H_{\text{crys}}^i(X/W) \otimes_W K \cong H_{\text{dR}}^i(X_K/K)$ により上の同型は

$$H_{\text{et}}^i(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\text{dR}} \cong H_{\text{dR}}^i(X_K/K) \otimes_K B_{\text{dR}}$$

となるが、この両辺の filtration Fil^n を左辺は $\text{Fil}^n := H_{\text{et}}^i \otimes \text{Fil}^n B_{\text{dR}}$, 右辺は $\text{Fil}^n := \sum_{p+q=n} \text{Fil}^p H_{\text{dR}}^i \otimes \text{Fil}^q B_{\text{dR}}$ (但し, $\text{Fil}^p H_{\text{dR}}^i$ は Hodge filtration) で定めるとき, 上の同型は filtration を保つ. 更に上の同型は \tilde{X} について functorial である。

今回の主定理はこの定理の有理基本群に対する類似が成り立つということである。

まず、 X を K 上の代数多様体とし、 $x \in X(k)$ とする。 X, x の \bar{K} 上への base change をそれぞれ $X_{\bar{K}}, x_{\bar{K}}$ と書くことにする。すると $X_{\bar{K}}$ の p -adic etale 有理基本群 $\pi_1^p(X_{\bar{K}}, x_{\bar{K}})$ が淡中圏の理論を用いて定義出来る。これは \mathbb{Q}_p 上の pro-unipotent 代数群になり、 K の絶対ガロア群 $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ が作用する。

一方、 X を k 上 proper smooth な代数多様体とし、 $x \in X(k)$ とする。この時、crystal 有理基本群 $\pi_1^{\text{crys}}(X/W, x)$ が定義される。これは K_0 上の pro-unipotent 代数群であり、Frobenius 作用素 φ という自己同型をひきおこす作用素が自然に定義される。また、Berthelot-Ogus の定理の類似である次の定理が成り立つ。

Theorem 3.3. \tilde{X} を V 上 proper smooth な scheme とし、 $\tilde{x} \in \tilde{X}(V)$ とする。 \tilde{X} の special fiber、generic fiber をそれぞれ X, X_K とし、 \tilde{x} の special fiber、generic fiber をそれぞれ x, x_K とする。この時次の canonical な同型がある。

$$\text{Lie } \pi_1^{\text{crys}}(X/W, x) \otimes_{K_0} K \cong \text{Lie } \pi_1^{\text{dR}}(X_K/K, x_K).$$

以上の準備のもとで、主定理である有理基本群に対するクリスタル予想は次のように述べられる：

Theorem 3.4 (有理基本群に対するクリスタル予想). \tilde{X} を V 上 proper smooth な scheme とし、 $\tilde{x} \in \tilde{X}(V)$ とする。 \tilde{X} の special fiber、generic fiber をそれぞれ X, X_K と書き、 \tilde{x} の special fiber、generic fiber をそれぞれ x, x_K と書く。また、 X_K, x_K の \bar{K} 上への base change をそれぞれ $X_{\bar{K}}, x_{\bar{K}}$ と書く。この時、次の同型がある。

$$\text{Lie } \pi_1^p(X_{\bar{K}}, x_{\bar{K}}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\text{crys}} \cong \text{Lie } \pi_1^{\text{crys}}(X/W, x) \otimes_{K_0} B_{\text{crys}}.$$

上式の両辺への $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ -作用を、左辺は $\sigma \otimes \sigma$, 右辺は $\text{id} \otimes \sigma$ ($\sigma \in \text{Gal}(\bar{K}/K)$) で定めると上の同型は $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ -作用と可換で、また上式への Frobenius 作用を、左辺は $\text{id} \otimes \varphi$, 右辺は $\varphi \otimes \varphi$ で定めると、上の同型は Frobenius 作用と可換である。また、上の同型を $\otimes_{B_{\text{crys}}} B_{\text{dR}}$ すると、Berthelot-Ogus の定理の類似による同型 $\text{Lie } \pi_1^{\text{crys}}(X/W, x) \otimes_{K_0} K \cong \text{Lie } \pi_1^{\text{dR}}(X_K/K, x_K)$ により上の同型は

$$\text{Lie } \pi_1^p(X_{\bar{K}}, x_{\bar{K}}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\text{dR}} \cong \text{Lie } \pi_1^{\text{dR}}(X_K/K, x_K) \otimes_K B_{\text{dR}}$$

となるが、この両辺の filtration Fil^n を左辺は $\text{Fil}^n := H_{\text{et}}^i \otimes \text{Fil}^n B_{\text{dR}}$, 右辺は $\text{Fil}^n := \sum_{p+q=n} \text{Fil}^p H_{\text{dR}}^i \otimes \text{Fil}^q B_{\text{dR}}$ (但し, $\text{Fil}^p H_{\text{dR}}^i$ は Hodge filtration) で定めるとき, 上の同型は filtration を保つ. 更に、Lie algebra の演算は $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ や Frobenius の作用及び filtration を保ち、また上の同型は組 (\tilde{X}, \tilde{x}) について functorial である。

4. 証明の概略 (COMPLEX OF SCHEMES)

証明の重要な step を一言で述べると、「有理基本群を ‘loop space’ (に相当するもの) の 0-th cohomology で表わす」ということである。但し我々は scheme を扱っているわけであるから、その ‘loop space’ に相当するものを定義する必要がある。その為に complex of schemes という概念を定義する。これは cosimplicial scheme を少し変えた概念である。

Definition 4.1. 1. Scheme S を一つ固定する。 S を S 上の scheme のなす category とする。この時、category $\mathbb{Z}S$ を次のように定義する。Object は S の object と同じである。また $X, Y \in \text{Ob}(\mathbb{Z}S) = \text{Ob}(S)$ に対して morphism を

$$\text{Hom}(X, Y) := \bigoplus_{i \in I} (\bigoplus_{f \in \text{Hom}_S(X_i, Y)} \mathbb{Z}f)$$

で定義する。但し、 $X = \coprod_{i \in I} X_i$ は X の連結成分への分解である。

2. S 上の complex of schemes とは $\mathbb{Z}S$ における図式

$$X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{i-1}} X_i \xrightarrow{f_i} X_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots$$

で、 $f_{i+1} \circ f_i = 0$ が全ての $i \in \mathbb{N}$ に対して成り立つもののこと。また、 n -truncated complex of schemes とは $\mathbb{Z}S$ における図式

$$X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} X_n$$

で、 $f_i \circ f_{i-1} = 0$ が全ての $1 \leq i \leq n-1$ に対して成り立つもののこと。Complex of schemes $X := \{X_i, f_i\}_{i \geq 0}$ に対してその n -truncation $X^{\leq n}$ を自然な図式の制限として定義する。

次に、complex of schemes のテンソル積を定義する。

Definition 4.2. $X := \{X_i, f_i\}_{i \geq 0}$ 、 $Y := \{Y_i, g_i\}_{i \geq 0}$ を complex of schemes とする。この時、テンソル積 $(X \otimes Y) := \{(X \otimes Y)_i, h_i\}_{i \geq 0}$ を

$$(X \otimes Y)_i := \coprod_{j+k=i} X_j \times_S Y_k,$$

$$h_i := \sum_{j+k=i} (f_j \times \text{id} + (-1)^j \text{id} \times g_k)$$

で定義する。

Loop space に相当する complex of schemes は次のようなものである。

Definition 4.3. X を S 上の scheme、 $x \in X(S)$ とする時、complex of schemes $\Omega_x X := \{\Omega_x X_n, d_n\}_{n \geq 0}$ を

$$\Omega_x X_n := X^n \text{ (} n\text{-fold product of } X \text{ over } S\text{),}$$

$$d_n := \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i d_n^i,$$

但し、

$$\begin{aligned} d_n^0(x_1, \cdots, x_n) &= (x, x_1, \cdots, x_n), \\ d_n^i(x_1, \cdots, x_n) &= (x_1, \cdots, x_i, x_i, \cdots, x_n), \quad (1 \leq i \leq n) \\ d_n^{n+1}(x_1, \cdots, x_n) &= (x_1, \cdots, x_n, x), \end{aligned}$$

で定義する。

更に $\Omega_x X$ やそのテンソル積らの間の射をいくつか定義する。

Definition 4.4. X, x を上の通りとし、また $\Omega_S S$ を $*$ と書くことにする。

1. Complex of schemes の射

$$m := \{m_n\}_{n \geq 0} : \Omega_x X \longrightarrow \Omega_x X \otimes \Omega_x X$$

を次のように定義する：まず $i + j = n$ なる $i, j \geq 0$ に対して $m_{i,j} : X^n \longrightarrow X^i \times_S X^j$ を

$$m_{i,j} := \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) f_{\sigma},$$

と定義する。但し、 σ は (i, j) -shuffle 全体を走り、 f_{σ} は

$$f_{\sigma}((x_1, \dots, x_i), (x_{i+1}, \dots, x_n)) := (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

で定義される射とする。この時、

$$m_n : X^n \longrightarrow \coprod_{i+j=n} X^i \times_S X^j$$

は $m_n := \sum_{i+j=n} \iota_{i,j} \circ m_{i,j}$ で定義される。但し、 $\iota_{i,j}$ は自然は包含写像 $X^i \times_S X^j \hookrightarrow \coprod_{i+j=n} X^i \times_S X^j$ である。

2. Complex of schemes の射

$$e := \{e_n\}_{n \geq 0} : \Omega_x X \longrightarrow *$$

を、 $e_0 = id, e_n = 0$ ($n \neq 0$) で定義する。

3. Complex of schemes の射

$$\Delta := \{\Delta_n\}_{n \geq 0} : \Omega_x X \otimes \Omega_x X \longrightarrow \Omega_x X$$

を次のように定義する：まず $i + j = n$ となる $i, j \geq 0$ に対して射

$$\Delta_{i,j} : X^i \times_S X^j \longrightarrow X^n$$

を

$$\Delta_{i,j}((x_1, \dots, x_i), (x_{i+1}, \dots, x_n)) := (x_1, \dots, x_n)$$

で定義し、 Δ_n を $\Delta_n := \sum_{i+j=n} \Delta_{i,j} \circ \iota_{i,j}$ と定義する。 $(\iota_{i,j}$ は 1. の通り。)

4. Complex of schemes の射

$$\epsilon := \{\epsilon_n\}_{n \geq 0} : * \longrightarrow \Omega_x X$$

を

$$\epsilon_n := (x, x, \dots, x) : S^n = S \longrightarrow X^n$$

で定義する。

Remark 4.5. 以上の構成は scheme でなく位相空間に対しても行える。その時は complex of spaces と呼ぶことにする。

さて、complex of schemes (spaces) の cohomology を次のように定義する：

Definition 4.6. 1. X を位相空間、 $x \in X$ とし、 S を一点とする。この時、 $\Omega_x X$ の Betti cohomology $H_B^*(\Omega_x X)$ を

$$H_B^*(\Omega_x X) := \varinjlim_n H_B^*(\Omega_x X^{\leq n}, \mathbb{Q})$$

で定義する。

2. X を代数閉体 k 上 proper smooth な scheme、 $x \in X(k)$ とし、 $S = \text{Spec } k$ とする。この時、 $\Omega_x X$ の p -adic etale cohomology $H_p^*(\Omega_x X)$ を

$$H_p^*(\Omega_x X) := \varinjlim_n (\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \varprojlim_m H_{\text{et}}^*(\Omega_x X^{\leq n}, \mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z}))$$

で定義する。

3. k を標数 0 の体、 X を k 上 smooth な scheme、 $x \in X(k)$ とし、 $S = \text{Spec } k$ とする。この時、 $\Omega_x X$ の de Rham cohomology $H_{\text{dR}}^*(\Omega_x X)$ を

$$H_{\text{dR}}^*(\Omega_x X) := \varinjlim_n H_{\text{dR}}^*(\Omega_x X^{\leq n}, \Omega_{\Omega_x X^{\leq n}/k})$$

で定義する。

4. k を標数 $p > 0$ の完全体、 X を k 上 proper smooth な scheme、 $x \in X(k)$ とし、 $S = \text{Spec } k$ とおく。この時、 $\Omega_x X$ の crystalline cohomology $H_{\text{crys}}^*(\Omega_x X)$ を

$$H_{\text{crys}}^*(\Omega_x X) := \varinjlim_n (\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} H_{\text{crys}}^*(\Omega_x X^{\leq n}/W(k)))$$

で定義する。

今、 \bullet を B, p , dR, crys のいずれかとし、 $H_{\bullet}^*(\Omega_x X)$ を上で定義した cohomology とする。この時、 m, ϵ により $H_{\bullet}^0(\Omega_x X)$ には環の構造が入り、 e, Δ は環準同型

$$e^* : H_{\bullet}^0(\Omega_x X) \longrightarrow K_{\bullet},$$

$$\Delta^* : H_{\bullet}^0(\Omega_x X) \longrightarrow H_{\bullet}^0(\Omega_x X) \otimes_{K_{\bullet}} H_{\bullet}^0(\Omega_x X)$$

を引き起こす。但し、 K_{\bullet} は以下の通り。

$$K_B = \mathbb{Q}, K_{\text{et}} = \mathbb{Q}_p, K_{\text{dR}} = k, K_{\text{crys}} = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} W(k).$$

この時、 $QH_{\bullet}^0(\Omega_x X) := \text{Ker}(e^*)/(\text{Ker}(e^*) \cdot \text{Ker}(e^*))$ とおくと $\Delta^* - \tau \circ \Delta^*$ は $QH_{\bullet}^0(\Omega_x X)$ に coLie algebra の構造を定める。但し τ は $\tau(x \otimes y) = y \otimes x$ により定まる $H_{\bullet}^0(\Omega_x X) \otimes H_{\bullet}^0(\Omega_x X)$ の自己同型である。

以上の準備の下で、証明の主ステップは次のように述べられる：

- Theorem 4.7.** 1. Definition 4.6 の 1. の状況で、 $\text{Lie}\pi_1^B(X, x)$ は $QH_B^0(\Omega_x X)$ の dual に同型である。
 2. Definition 4.6 の 2. の状況で、 $\text{Lie}\pi_1^p(X, x)$ は $QH_p^0(\Omega_x X)$ の dual に同型である。
 3. Definition 4.6 の 3. の状況で、 $\text{Lie}\pi_1^{\text{dR}}(X/k, x)$ は $QH_{\text{dR}}^0(\Omega_x X)$ の dual に同型である。
 4. Definition 4.6 の 4. の状況で、 $\text{Lie}\pi_1^{\text{crys}}(X/W, x)$ は $QH_{\text{crys}}^0(\Omega_x X)$ の dual に同型である。

この定理を用いると、有理基本群に対する Hodge 理論および p 進 Hodge 理論は complex of schemes に対する cohomology の Hodge 理論あるいは p 進 Hodge 理論に帰着される。そして、complex of schemes に対する cohomology の Hodge 理論あるいは p 進 Hodge 理論は、種々の構造を保つ射を構成した後に、spectral sequence を用いて普通の scheme に対する cohomology の Hodge 理論あるいは p 進 Hodge 理論に帰着することにより証明される。

Remark 4.8. ここで述べた証明方法は、通常の Hodge 理論の場合、Hain や Wojtkowiak の証明と本質的には似ているが、少し異なっている。彼らの方法では、有理基本群の Lie 環の演算が混合 Hodge 構造の射になることは、Bar construction 等

を用いて示すわけであるが、ここでの証明では、そのことは complex of schemes の射 Δ に関する functoriality から出てくる。つまり、「基本群の演算は ‘loop space’ の射から induce されるものである」という位相幾何的直観に合っている。

p 進 Hodge 理論の証明において Hain, Wojtkowiak の証明をそのまま適用することは (少なくとも Tsuji の証明に沿う形では) 困難であると (少なくとも現時点での私には) 思われるが、complex of schemes を用いることにより、証明が可能となっている。

REFERENCES

- [Be-O1] P. Berthelot and A. Ogus, *Notes on Crystalline Cohomology*, Mathematical Notes, Princeton University Press, 1978.
- [Be-O2] P. Berthelot and A. Ogus, *F-Isocrystals and De Rham Cohomology. I*, Invent. Math. **72**(1983), 159–199.
- [D1] P. Deligne, *Theorie de Hodge II*, Publ. Math. I.H.E.S., **40**(1971), 5–57.
- [D2] P. Deligne, *Theorie de Hodge III*, Publ. Math. I.H.E.S., **44**(1974), 5–77.
- [D3] P. Deligne, *Le Groupe Fondamental de la Droite Projective moins Trois Points*, in Galois Groups over \mathbf{Q} , Springer Verlag, New York, 1989.
- [D4] P. Deligne, *Catégories Tannakiennes*, in Grothendieck Festschrift, Progress in Mathematics, Birkhäuser.
- [D-Mi] P. Deligne and J. S. Milne, *Tannakian Categories*, in Hodge Cycles, Motives, and Shimura Varieties, Lecture Note in Math. 900, Springer Verlag, 1982, pp. 101–228.
- [Fa] G. Faltings, *Crystalline Cohomology and p -adic étale cohomology*, Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory, J-I. Igusa ed., The Johns Hopkins University Press, pp. 25–80.
- [Fo] J.-M. Fontaine, *Sur certain types de représentations p -adiques du groupe de Galois d’un corps local; construction d’un anneau de Barsotti-Tate*, Ann. of Math. **115**(1982), 529–577.
- [Fo-Me] J.-M. Fontaine and W. Messing, *p -adic periods and p -adic étale cohomology*, Contemporary Math. **67**(1987), 179–207.
- [Ha1] R. Hain, *The Geometry of the Mixed Hodge Structure on the Fundamental Group*, Part II, Proc. Sympos. Pure Math. **46**(1987), 247–282.
- [Ha2] R. Hain, *The de Rham Homotopy Theory of Complex Algebraic Variety I*, K-theory **1**(1987), 271–324.
- [Hy-K] O. Hyodo and K. Kato, *Semi-stable reduction and crystalline cohomology with logarithmic poles*, Astérisque **223**(1994), 221–268.
- [K] K. Kato, *Semi-stable reduction and p -adic étale cohomology*, Astérisque **223**(1994), 269–293.
- [K-Me] K. Kato and W. Messing, *Syntomic cohomology and p -adic étale cohomology*, Tohoku Math. J. **44**(1992), 1–9.
- [Sa] N. Saavedra Rivano, *Catégories Tannakiennes*, Springer Lecture Note, **265**, 1972.
- [Sh1] A. Shiho, *Crystalline Fundamental Groups I — Isocrystals on Log Crystalline Site and Log Convergent Site*, preprint.
- [Sh2] A. Shiho, *Crystalline Fundamental Groups II — Overconvergent Isocrystals*, preprint.
- [Sh3] A. Shiho, *Fundamental Groups, Homotopy Groups and p -adic Hodge Theory*, in preparation.
- [Su] D. Sullivan, *Infinitesimal Calculation in Topology*, Publ. Math. I.H.E.S., **47**(1978), 269–331.
- [T1] T. Tsuji, *p -adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case*, preprint.
- [T2] T. Tsuji, *On p -adic Hodge Theory*, RIMS Kokyuroku **1026**, 63–75. (in Japanese)

- [W] Z. Wojtkowiak, *Cosimplicial Objects in Algebraic Geometry*, in Algebraic K-Theory and Algebraic Topology, P. G. Goerss and J. F. Jardine eds., Kluwer Academic, 1993, 287–327.

MATHEMATICAL INSTITUTE, TOHOKU UNIVERSITY, AOBA, SENDAI, 980-8578, JAPAN.

ガロア群と写像類群をめぐる最近のいくつかの注意

角皆 宏 (上智大理工), 中村 博昭 (都立大理)

有理数体 \mathbf{Q} の絶対 Galois 群 $G_{\mathbf{Q}} = \text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ は副有限基本群 $\hat{\pi}_{0,3} = \pi_1(\mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^1 \setminus \{0, 1, \infty\})$ (これは階数 2 の自由副有限群 \hat{F}_2 と同型) に自然に外作用しているが、接ベクトル $\vec{01}$ を基本群の基点にとるとき、持ち上げ $\varphi: G_{\mathbf{Q}} \rightarrow \text{Aut} \hat{F}_2$ が自然に定まる。これが単射であることが知られている (Belyi[Be])。Grothendieck [G](p.247) は、 $\hat{\pi}_{0,3}$ を種数 0 の 4 標点曲線のモジュライ空間 $\mathcal{M}_{0,4}$ の基本群とみなし、さらに一般の種数の標点曲線のモジュライ空間の基本群のなす塔に考察を拡大することを示唆する文脈の中で、次のように述べている：

...Thus the Galois group $G_{\mathbf{Q}}$ can be realized as an automorphism group of a very concrete profinite group, and moreover respects certain essential structures of this group. It follows that an element of $G_{\mathbf{Q}}$ can be “parametrized” (in various equivalent ways) by a suitable element of this profinite group (a free profinite group on two generators), or by a system of such elements, these elements being subject to certain simple necessary (but doubtless not sufficient) conditions for this or these elements to really correspond to an element of $G_{\mathbf{Q}}$. One of the most fascinating tasks here is precisely to discover necessary and sufficient conditions on an exterior automorphism of $\hat{\pi}_{0,3}$, i.e., on the corresponding parameter(s), for it to come from an element of $G_{\mathbf{Q}}$ — which would give a “purely algebraic” description, in terms of profinite groups with no reference to the Galois theory of number fields, to the Galois group $G_{\mathbf{Q}}$.

上に言う “parametrization” の仕方については、今日では、V.G.Drinfeld によって導入された Grothendieck-Teichmüller 群と呼ばれる次なる群 GT への $G_{\mathbf{Q}}$ の埋め込みを考えることにより、標準化されたといつてよい：

$$\text{GT} = \left\{ \sigma \in \text{Aut} \hat{F}_2 \left| \begin{array}{l} \sigma(x) = x^\lambda, \sigma(y) = f y^\lambda f^{-1}, (\lambda \in \hat{\mathbf{Z}}^\times, f = f(x, y) \in \hat{F}_2') \\ \text{s.t. (I),(II),(III)} \end{array} \right. \right\}$$

$$(I) \quad f(x, y)f(y, x) = 1$$

$$(II) \quad f(z, x)z^m f(y, z)y^m f(x, y)x^m = 1 \quad (\lambda = 2m + 1, xyz = 1)$$

$$(III) \quad f(x_{12}, x_{23})f(x_{34}, x_{45})f(x_{51}, x_{12})f(x_{23}, x_{34})f(x_{45}, x_{51}) = 1 \quad \text{in } \hat{P}_5^*$$

(ここに $P_5^* =$ 球面 5 本糸純組紐群/center、 \hat{P}_5^* はその副有限完備化)。

つまり、Grothendieck のいう fascinating problem は、GT の元として与えられたパラメータ (λ, f) が、いつ $G_{\mathbf{Q}}$ の像を与えるかを調べよ、という問題になる。実際、1996 年の後半から、上の (I),(II),(III) 以外にも、 $G_{\mathbf{Q}}$ の元が GT 内で満たす (少なくとも見掛け上は新しくみえる) 関係式が、伊原 [I4-5]、中村 [N1] により独立な観点から報告され始めている。前者は arithmetic relations と呼ばれ、G.Anderson[A] によって示された「 Γ 関数の Gauss の相乗公式の hyperadelic 類似」に現われる各 factor を GT 上に定式化することで、その条件を満たす部分群として GTA を導入している： $G_{\mathbf{Q}} \subset \text{GTA} \subset \text{GT}$ 。(詳しくは [I4-5] 参照)

「リーマン面に関連する位相幾何学」予稿。.

本稿の目的は、後者の系統 (geometric relations) に関する最近の進展について報告を行うことである。これは、より Grothendieck の観点に近い立場 — モジュライ空間の幾何的な事情から生じる関係式に関するもので [G] p.248 の中の次の一節を基調にしているといてもよい。

...It would seem (incredible, but true!) that even the geometry of the first level of the Teichmüller tower (corresponding thus to “moduli” either for projective lines with four marked points, or to elliptic curves (!)) has never been explicitly described, for example the relation between the genus 0 case and the geometry of the octahedron, and that of the tetrahedron. A fortiori the modular multiplicities $\mathcal{M}_{0,5}$ (for the projective lines with five marked points) and $\mathcal{M}_{1,2}$ (for the curves of genus 1 with two marked points), which actually are practically isomorphic, appear to be virgin territory — braid groups will not enlighten us on their score! I have begun to look at $\mathcal{M}_{0,5}$ at stray moments; it is a real jewel, with a very rich geometry closely related to the geometry of icosahedron.

我々は、このモジュライ幾何的な系統から発見された G_Q の GT 内で満たす関係式のうち、(I)(II)(III) 以外のものを、簡単のため「ニュータイプ」と呼んでいる。現段階では、Anderson-伊原による arithmetic な関係式たちと、本稿で報告するモジュライの幾何的条件から生ずる「ニュータイプ関係式」たちとの間の本質的な結び付きを解明するにはまだ至っていないが、少なくとも表面的に目に付く技術的な関連性は観察されている。また、ニュータイプ関係式たちの発見のパターンは全く無作為にできるものではなく、近い将来いくつかの系統に分類されるか、うまくすれば何らかの統制原理にまとめることができるものと期待している。

1. 高種数の写像類群への作用

以下 G_Q の各元 σ の GT における像を $(\lambda_\sigma, f_\sigma)$ と記し、また組紐群の標準生成元を $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \in B_n$ で表すことにする。GT の定義にある (I),(II),(III) は、 \mathbf{P}^1 上の 4 点及び 5 点の配置空間 $\mathcal{M}_{0,4}, \mathcal{M}_{0,5}$ の幾何学 (主に対称性) のガロア表現へ及ぼす影響をいろいろ考えることにより得られる幾何的な関係式である。これに対し、高種数の写像類群への G_Q の作用、特に $\mathcal{M}_{0,5}$ と $\mathcal{M}_{1,2}$ に生ずるガロア表現の比較を考えて、中村 [N1] により最初のニュータイプ関係式

$$(IV) \quad f_\sigma(\sigma_1, \sigma_2^4) = \sigma_2^{8\rho_2(\sigma)} f_\sigma(\sigma_1^2, \sigma_2^2) \sigma_1^{4\rho_2(\sigma)} (\sigma_1 \sigma_2)^{-6\rho_2(\sigma)} \quad \text{in } \hat{B}_3$$

が得られた。ここで $\rho_2 : G_Q \rightarrow \hat{Z}(1)$ は 2 の正の冪根 $\sqrt[2]{2} \in \mathbf{R}_{>0}$ に関する Kummer 1-cocycle; $\sigma(\sqrt[2]{2}) = \exp(2\pi i/N)^{\rho_2(\sigma)} \sqrt[2]{2}$ をあらわす。続いて Lochak, Schneps との共著 [LNS] では、[N1] で得られた $\mathcal{M}_{1,2}$ に生ずる表現の記述と、[N2] で得られた $\mathcal{M}_{g,1}$ に生ずる表現の記述との比較から、2 番目のニュータイプ関係式

$$(III)' \quad g_\sigma(x_{45}, x_{51}) f_\sigma(x_{12}, x_{23}) f_\sigma(x_{34}, x_{45}) = f_\sigma(\sigma_1 \sigma_3, \sigma_2^2) \quad \text{in } \hat{B}_5^*$$

が得られた。ここに $B_5^* = \text{球面 5 本糸全組紐群/center}$ 、 \hat{B}_5^* はその副有限完備化、また、 $(\lambda, f) \in \text{GT}$ に対して $g = g(x, y) \in \hat{F}_2$ は $f(x, y) = g(y, x)^{-1} g(x, y)$ を満たす元で、その存在と一意性は [LS] による。そこで [LNS] では Kummer 1-cocycle ρ_2 を GT 上に延長し、(I),(II),(III)',(IV) を満たす GT の部分群として \mathbb{I} を導入した： $G_Q \subset \mathbb{I} \subset \text{GT}$ (特に (III)' \Rightarrow (III).) [LNS] ではさらに \mathbb{I} は任意種数の写像類群の“標準的な” pants 分解に対して局所両立的な作用をもつことが示唆されていたが、最近のプレプリント [NS] では、向きのある任意の型の曲面の任意の型のパンツ分解に対して、ある付加構造 (quilt 構造) を考えることで、 \mathbb{I} の写像類群の塔への systematic な作用の族を定義することに成功している。

2. $\mathcal{M}_{0,5}$ の幾何

上のニュータイプ関係式 (III)' を種数 0 のみの考察でより直接的に理解しようという試みから、角皆 $[T]$ は $\mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ を $\mathcal{M}_{0,5}/(\mathfrak{S}_5 \text{ の部分群})$ にいろいろな仕方で適切に埋め込むことにより、更に次の一連の幾つかのニュータイプの関係式を得た。また、この方法で上の (III)' の別証明を与えることも出来た。(本節の関係式は全て \hat{B}_5^* 内のもの)

$$(I)^\sharp \quad f_\sigma(\sigma_4\sigma_3\sigma_4, x_{23})x_{12}^{2\rho_2(\sigma)}f_\sigma(\sigma_4\sigma_{15}\sigma_4, x_{12})x_{23}^{2\rho_2(\sigma)} = 1,$$

$$(III)'' \quad f_\sigma(x_{12}, \sigma_2\sigma_{15})x_{12}^{\rho_2(\sigma)}f_\sigma(\sigma_4\sigma_{15}\sigma_4, x_{12})x_{23}^{\rho_2(\sigma)}f_\sigma(\sigma_1\sigma_3, x_{23})f_\sigma(x_{51}, x_{12})f_\sigma(x_{23}, x_{34}) = 1.$$

更に同様の方法で、現在までに次の関係式も得ている。(III)', (III)'' もこれらより従う。

$$g_\sigma(x_{34}, x_{45}) = x_{12}^{\rho_2(\sigma)}f_\sigma(\sigma_4\sigma_{15}\sigma_4, x_{12})x_{23}^{\rho_2(\sigma)}f_\sigma(\sigma_1\sigma_3, x_{23}),$$

$$g_\sigma(x_{45}, x_{34}) = x_{12}^{\rho_2(\sigma)}f_\sigma(\sigma_4\sigma_{15}\sigma_4, x_{12})x_{23}^{\rho_2(\sigma)}f_\sigma((\sigma_{15}\sigma_4\sigma_1\sigma_{15})^{-1}, \sigma_4\sigma_{15}\sigma_4)(x_{12}x_{45})^{-\rho_2(\sigma)},$$

$$g_\sigma(x_{12}, x_{23}) = (\sigma_1\sigma_2\sigma_1)^{3\rho_3(\sigma)-2\rho_2(\sigma)}f_\sigma(\sigma_4\sigma_{15}\sigma_4, \sigma_1\sigma_2\sigma_1)(\sigma_4\sigma_{15}\sigma_4)^{-3\rho_3(\sigma)+2\rho_2(\sigma)}$$

$$f_\sigma((\sigma_{15}\sigma_4\sigma_1\sigma_{15})^{-1}, \sigma_4\sigma_{15}\sigma_4)(x_{12}x_{45})^{-\rho_2(\sigma)},$$

$$g_\sigma(x_{23}, x_{12}) = (\sigma_1\sigma_2\sigma_1)^{3\rho_3(\sigma)-2\rho_2(\sigma)}f_\sigma(\sigma_4\sigma_{15}\sigma_4, \sigma_1\sigma_2\sigma_1)(\sigma_4\sigma_{15}\sigma_4)^{-3\rho_3(\sigma)+2\rho_2(\sigma)}g_\sigma(x_{45}, x_{51}).$$

証明の基本的な道具立ては伊原 [I3] に倣う。以下では埋込 $\bar{Q} \hookrightarrow C$ を一つ固定しておく。 \mathbf{P}^1 上の 5 点配置空間 $X = \mathcal{M}_{0,5} = \{(x_i)_{i=1}^5 \in (\mathbf{P}^1)^5 | x_i \neq x_j (i \neq j)\} / \text{PGL}(2)$ を

$$X \simeq \{(\lambda, t) \in (\mathbf{P}^1)^2 | \lambda, t \neq 0, 1, \infty, \lambda t \neq 1\}$$

$$(0, \lambda, 1, t^{-1}, \infty) \bmod \text{PGL}(2) \rightsquigarrow (\lambda, t)$$

で一意化しておく。 X に stable points を付け加えて出来る compact 化 X^* は、 $\mathbf{P}_\lambda^1 \times \mathbf{P}_t^1$ を 3 点 $(\lambda, t) = (0, \infty), (1, 1), (\infty, 0)$ で blow up して構成できる。 $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$ 上に 5 点が x_1, \dots, x_5 の順に並んだ配置に対応する $X(\mathbf{R})$ の部分集合 $\mathcal{B} = \{(\lambda, t) \in \mathbf{R} | 0 < \lambda, t < 1\}$ は五角形状の単連結領域であり、 \mathcal{B} を基点とする $X(C)$ の位相的基本群 $\pi_1^{\text{top}}(X(C); \mathcal{B}) \simeq P_5^*$ が定義される。五角形 \mathcal{B} の各頂点及び各辺の中点に対応する tangential base points を、頂点 $P_3 : (\lambda, t) = (0, 0)$ は $\bar{Q}\{\{\lambda, t\}\}$ への埋込に、辺の中点 $M_4 : (\lambda, t) = (0, 1/2)$ は $\bar{Q}\{\{\lambda\}\}[[t - 1/2]]$ への埋込に対応するように (他の点は自己同型で移り合うように) 定める。これらの tangential base points Q を基点として基本群 $\pi_1(X; Q) \simeq \hat{P}_5^*$ が定義される。 $\overrightarrow{QQ'} \in \pi_1(X; Q, Q')$ を \mathcal{B} 内で Q と Q' とを結ぶ道によって定める。(III) の証明の核心は、 $\sigma \in G_Q$ に対し $\sigma(\overrightarrow{P_3P_5}) = \overrightarrow{P_3P_5}f_\sigma(x_{45}, x_{34})$ となることであつた。一方、今回の新しい関係式は、次の命題により、図中の小三角形を考えてそれぞれ得られる。

命題 . $\sigma \in G_Q$ に対し、次が成り立つ。

$$\sigma(\overrightarrow{M_5M_4}) = \overrightarrow{M_5M_4}x_{12}^{\rho_2(\sigma)}f_\sigma(\sigma_4\sigma_{15}\sigma_4, x_{12})x_{23}^{\rho_2(\sigma)},$$

$$\sigma(\overrightarrow{P_5M_5}) = \overrightarrow{P_5M_5}f_\sigma(\sigma_1\sigma_3, x_{23}),$$

$$\sigma(\overrightarrow{P_3M_5}) = \overrightarrow{P_3M_5}f_\sigma((\sigma_{15}\sigma_4\sigma_1\sigma_{15})^{-1}, \sigma_4\sigma_{15}\sigma_4)(x_{12}x_{45})^{-\rho_2(\sigma)},$$

$$\sigma(\overrightarrow{M_5M_2}) = \overrightarrow{M_5M_2}(\sigma_1\sigma_2\sigma_1)^{3\rho_3(\sigma)-2\rho_2(\sigma)}f_\sigma(\sigma_4\sigma_{15}\sigma_4, \sigma_1\sigma_2\sigma_1)(\sigma_4\sigma_{15}\sigma_4)^{-3\rho_3(\sigma)+2\rho_2(\sigma)}.$$

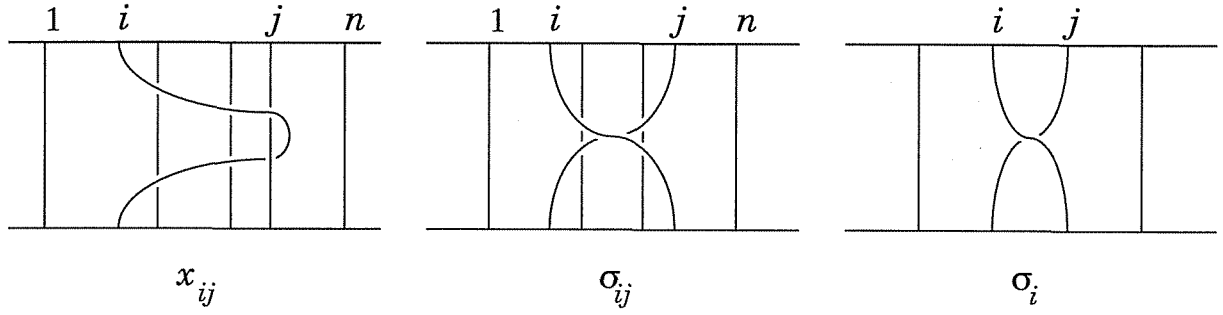


図 1. P_5^*, B_5^* の生成元

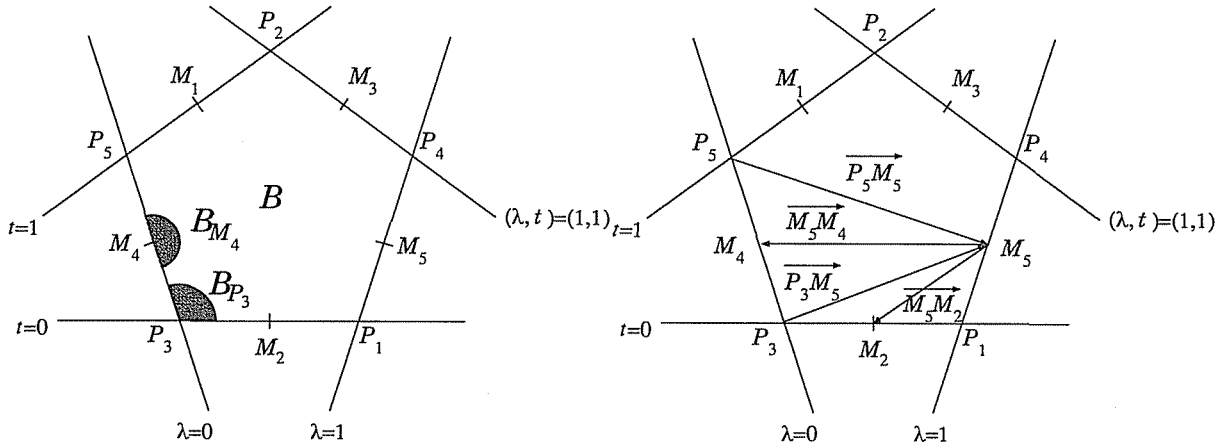


図 2. 基五角形 B 、tangential base points、道と小三角形

3. $\mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ の被覆による新しい方法

(IV) の証明の簡易化を追求する中で、 $\mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ の被覆を考えることにより、(IV) を精密化した次の関係式が得られた (中村-Schneps[NS])。

$$\begin{aligned} \text{(IV)'} \quad f(\sigma_1, \sigma_2^2) &= \sigma_2^{4\rho_2} f(\sigma_1^2, \sigma_2^2) \sigma_1^{2\rho_2} (\sigma_1 \sigma_2^2)^{-2\rho_2} \\ &= \sigma_2^{-4\rho_2} f(\sigma_1, \sigma_2^4) \sigma_1^{-2\rho_2} (\sigma_1 \sigma_2^2)^{2\rho_2} \quad \text{in } \hat{B}_3. \end{aligned}$$

これは $\mathbf{P}^1 \setminus \{0, \pm 1, \infty\}$ から $\mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ への 2 種類の射 (2 次被覆と 1 点を埋める射) を考えて得られる。さらに同様の考え方を別の被覆に適用することにより、

$$\text{(GF)} \quad g(\sigma_1^2, \sigma_2^2) = f(\sigma_1, \eta) \sigma_1^{3\rho_3 - 2\rho_2} \eta^{2\rho_2 + \rho_3}.$$

も得られている (ここで $\eta = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1$)。これらの被覆は、Grothendieck's dessin (小松亨氏の講演参照) により表現可能な対象であり、Grothendieck-Teichmüller の哲学と dessin の話題との新しい関連の可能性を示唆するという意味で、興味深いと思われる。

参考文献

[A] Anderson, G., The hyperadelic gamma function, Invent. Math. 95 (1989), 63–131.

- [Be] Belyĭ, G. V., On Galois extensions of a maximal cyclotomic field, *Izv. Akad. Nauk USSR* 43 (1979), 267–276.
- [De] Deligne, P., Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points, in “Galois Groups over \mathbb{Q} ”, Publ. MSRI 16 (1989), 79–298.
- [Dr] Drinfel’d, V. G., On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group closely related with $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, *Leningrad J.* 2 (1991), 829–860.
- [G] Grothendieck, A., Esquisse d’un Programme 1984, in “Geometric Galois Actions; 1. Around Grothendieck’s Esquisse d’un Programme” London Math. Soc. Lect. Note Ser. 242, Cambridge Univ. Press 1997, 4–58, 英訳: 243–283
- [I1] Ihara, Y., Profinite braid groups, Galois representations and complex multiplications, *Ann. of Math.* 123 (1986), 43–106.
- [I2] Ihara, Y., Braids, Galois Groups, and Some Arithmetic Functions, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Kyoto 1990*, vol. 1, 99–120.
- [I3] Ihara, Y., On the embedding of $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ into \widehat{GT} , in “The Grothendieck theory of Dessins d’Enfants”, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 200, Cambridge University Press, 1994, 173–200.
- [I4] 伊原康隆, The Grothendieck-Teichmüller group and the adelic beta function, *京大数理論究録* 998, 44–53.
- [I5] Ihara, Y., On Beta and Gamma functions associated with the Grothendieck-Teichmüller group, preprint (RIMS-1177), 1997.
- [LNS] Lochak, P., Nakamura, H., Schneps, L., On a new version of the Grothendieck-Teichmüller group, *C. R. Acad. Sci. Paris* 325 Ser. I (1997), 11–16.
- [LS] Lochak, P., Schneps, L., A cohomological interpretation of the Grothendieck-Teichmüller group, *Invent. Math.* 127 (1997), 571–600.
- [Ma] Matsumoto, M., Galois group $G_{\mathbb{Q}}$, Singularity E_7 , and Moduli \mathcal{M}_3 , in “Geometric Galois Actions” 2. The Inverse Galois Problem, Moduli Spaces and Mapping Class groups, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 243, Cambridge University Press, 1997, 179–218.
- [N1] Nakamura, H., Limits of Galois representations in fundamental groups along maximal degeneration of marked curves I, IAS preprint, 1996.
- [N2] Nakamura, H., Galois representations in the profinite Teichmüller modular groups, in “Geometric Galois Actions” 1. Around Grothendieck’s Esquisse d’un Programme, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 242, Cambridge University Press, 1997, 159–173.
- [N3] 中村博昭, Grothendieck-Teichmüller 群のある精密化, 「リーマン面に関連する位相幾何学」予稿集, *北大数学講究録* 51 (1997), 91–92.
- [NS] Nakamura, H., Schneps, L., On a subgroup of Grothendieck-Teichmüller group acting on the tower of profinite Teichmüller modular groups, preprint, 1998.
- [T] 角皆宏, Grothendieck-Teichmüller 群内で Galois 群の像が満たす新しい型の関係式, *早大理工総研報告集 IX 整数論* (1998), 49–58.

上智大学理工学部数学科, 102-8544 東京都千代田区紀尾井町 7-1
E-mail address: tsuno@mm.sophia.ac.jp

東京都立大学理学部数学科, 192-0397 東京都八王子市南大沢 1-1
E-mail address: h-naka@math.metro-u.ac.jp

DEGENERATING FAMILIES OF BRANCHED COVERINGS OF THE COMPLEX PROJECTIVE LINE AND BALLS

MAKOTO NAMBA

1 It is known that a finite branched covering of a given complex manifold M is determined uniquely (up to isomorphisms) by its branch locus and (permutation) monodromy representation. However it is a difficult problem to determine the covering from them concretely (algebraically, analytically), even if $M = \mathbb{P}^1$ the complex projective line. We introduce two kinds of pictures, a Klein picture and a Riemann picture, each of which determines the covering topologically for the cases $M = \mathbb{P}^1$ and $M = \Delta(0, a) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < a\}$, a ball.

Let $X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ be a branched covering of \mathbb{P}^1 of degree d , where X is a compact Riemann surface. We denote by $B_f = \{q_1, \dots, q_n\}$ and Φ_f the branch locus and the monodromy representation of f respectively. Φ_f is determined uniquely up to its representation class $[\Phi_f]$.

Let Γ be a simple oriented loop in \mathbb{P}^1 passing through the points q_1, \dots, q_n in this order surrounding a domain Ω clockwise. We regard Ω and $\mathbb{P}^1 - \Omega$ as a continent and an ocean respectively. We pull Γ , Ω and $\mathbb{P}^1 - \Omega$ back over f and get a checked pattern consisting of d -continents and d -oceans, which we call a Klein picture of f . The Klein picture determines f topologically.

On the other hand, take a reference point q_0 in Ω . We take disjoint pathes connecting q_0 and q_j ($j = 1, \dots, n$). Let T_0 be the graph consisting of the points q_0, q_1, \dots, q_n and these pathes. We pull T_0 back over f and get a graph T on X . T gives a cellular decomposition of X , which we call a Riemann picture of f . The Riemann picture also determines f topologically. The Klein picture and the Riemann picture for a finite branched covering of a ball are defined in a similar way.

2 A finite branched covering $f : X \longrightarrow \Delta(0, a) \times \mathbb{P}^1$ is called a degenerating family of finite branched coverings of \mathbb{P}^1 if (1) every fiber $t \times \mathbb{P}^1$ is not contained in B_f and (2) every fiber $t \times \mathbb{P}^1$, ($t \neq 0$) meets transversally with B_f at n , (n : fixed) points $\{q_1, \dots, q_n\}$. Put $X_t = f^{-1}(t \times \mathbb{P}^1)$ and $f_t = f : X_t \longrightarrow t \times \mathbb{P}^1$. f is then identified with the family $\{f_t\}$. Assume for simplicity, $a > 1$ and $(\Delta(0, a) \times \infty) \cap B_f = \emptyset$. Let $\delta = \{t = e^{is} \mid 0 \leq s \leq 2\pi\}$ be the unit circle. δ induces a braid $\theta(\delta)$ on $\{q_1, \dots, q_n\}$ which is called the braid monodromy. By the theorem of Zariski-van Kampen, the equality $\Phi_g \theta(\delta) = \Phi_f$, where $g = f_1$. We show that $f = \{f_t\}$ is topologically determined by the pair $([\Phi_g], \theta(\delta))$, while the central fiber f_0 is determined topologically only by $[\Phi_g]$. We can observe the degeneration through the Klein picture.

We can also define a degenerating family of finite branched coverings of balls and get a similar theory to the case of that of \mathbb{P}^1 .

3 Every complex 2-dimensional normal singularity (X, x) can be regarded as a degenerating family of branched coverings of balls. We can compute the local fundamental group $\pi_1(X - x, p_0)$ using the Zariski-van Kampen theorem and the Reidemeister-Schreier method. The Riemann picture is very useful to carry out the computation correctly.

This method works for the computation of the fundamental group of every 3 dimensional oriented compact manifold Y . In fact, By the theorem of Hilden-Montesinos, there is a covering $h : Y \longrightarrow S^3$ of degree 3 of the 3-sphere S^3 branching at a knot B_h whose monodromy $\Phi_h(\gamma_j)$, (γ_j : generators of the fundamental group $\pi_1(S^3 - B_h)$), consist of only transpositions.

We may regard S^3 as the boundary of $\Delta(0, 1) \times \Delta(0, b)$ in \mathbb{C}^2 and the knot B_h as a braid in $\delta \times \Delta(0, b)$. Let B be the cone connecting the origin of \mathbb{C}^2 and every point of B_h . We construct a topological covering $f : X \longrightarrow \Delta(0, a) \times \Delta(0, b)$ of degree 3 branching at B which is an extension of h . (X is in fact a cone of Y .) Then f is a topological degenerating family of branched coverings of balls and

$$\pi_1(Y, p_0) \simeq \pi_1(X - x, p_0).$$

Thus the computation of $\pi_1(Y, p_0)$ can be done by our method.

To construct 3-dimensional oriented compact manifolds is reduced to find pairs $([\Phi], \sigma)$ such that $\Phi\sigma = \Phi$, where Φ is a transitive representation of the free group $\langle \gamma_1, \dots, \gamma_n \rangle$ to the 3rd symmetric group such that every $\Phi(\gamma_j)$ is a transposition and σ is a braid of n -strings.

We prove that there are 3 canonical forms for $[\Phi]$. The braids σ with $\Phi\sigma = \Phi$ form a subgroup K_Φ of the n -th braid group B_n of finite index. It is important to analyze the subgroup K_Φ for the canonical Φ .

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE, OSAKA UNIVERSITY, TOYONAKA, OSAKA, JAPAN

E-mail address: namba@math.wani.osaka-u.ac.jp

写像類群のアルティン群による簡明な表示

松本 眞

98年8月8日

ABSTRACT. 向き付け可能閉曲面の写像類群の具体的な表示は、いろいろな過程を経て Wajnryb により書き下されました。この研究では、彼の表示を書き直すと、アルティン群と呼ばれる一般化された組み紐群の言葉で簡明に記述できることを示します。一部、単なる書き直しではすまないところがあって、そこは、Brieskorn によるアルティン群と特異点変形のモノドロミーの深い関係を少し具体的に計算することでつめられます。また、書き直しといっても、Brieskorn-斎藤 恭司によるアルティン群の Normal Form の理論を計算機に実装して計算するもので、それほど単純ではありません。とは言え、あまり深いことは使っていないので、読みもの風に読めるように書こうと思います。

CONTENTS

1. 写像類群のアルティン群による表示	1
1.1. アルティン群	
1.2. 写像類群	
1.3. アルティン群による写像類群の表示	
2. 証明のあらすじ	6
2.1. なぜそうなると信じたか	
2.2. Normal form と計算機	
2.3. 最後の詰め: Hyperelliptic involution	
謝辞.	
References	9

1. 写像類群のアルティン群による表示

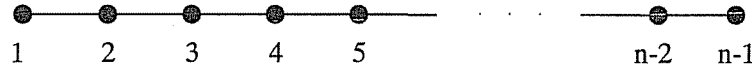
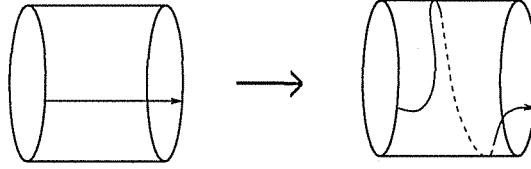
1.1. アルティン群. アルティン群と言うのはいわゆる組み紐群の、すごく単純な一般化です。アルティンが与えた n 本系の組み紐群の表示は、生成元が $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ で関係式が

$$\begin{aligned}\sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i \quad (|i-j| \geq 2), \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i &= \sigma_j \sigma_i \sigma_j \quad (|i-j| = 1)\end{aligned}$$

です。それぞれの生成元が、二本の糸の入れ替えです。これをグラフで表すとして、可換な元は「関係が良好だから可換」、そうでない非可換な元は「関係がこじれているから、可換でない」と思いまして、グラフ理論で良くあるように、関係がこじれたところだけ辺で結ぶと Figure 1 のグラフになります。これは、リー代数の業界では A_{n-1} 型 Dynkin 図形と呼ばれているものです。グラフ理論の業界では、ただ「道」と呼ばれています。

では、考え方を逆にして、グラフが与えられた時に、それに対応する群を考えてみてはどうでしょうか。ループはなくて、多重辺を許した有限グラフ Γ を考えます。この頂点を生成元とする群を考え、関係式を次のように入れます。点 a と b の間に辺が一本もない時は、二人の関係はスムーズで $ab = ba$ 。もし一本辺があったらちよっこじれていて、可換ではないけれども $aba = bab$ 、二本あったらもっとこじれていて

この研究は、筆者の数理解析研究所・慶応大学・Max Planck Institute for Mathematics・Nice 大の滞在中に行われました。文部省科学技術研究費も投入されました。関係諸機関に感謝します。MPI preprint 97-74 にまとめましたが、そこには(主結果の証明には使わなかった)特異点変形の計算に間違いがあります。直したバージョンはお問い合わせ下さいませ。なお、当原稿は 98 年 7 月山口大トポロジーシンポジウムの講演集の、誤植を訂正した程度のものです。

FIGURE 1. A_{n-1} のグラフFIGURE 2. $\Sigma_0^{<2>}$ 上の Dehn twist

$abab = baba$ 、あとは推して知るべし。という関係式を、全ての頂点の組にいれます。(二点間の間に無限本の辺を許し、そこでは a と b の関係をいれない、というバージョンもありますが、ここでは扱いません。)

こうして表示された群を Γ に付随するアルティン群といい、 $A(\Gamma)$ で表します。例えば、 $A(A_{n-1})$ は n 本系の組み紐群と同型になるわけです。ついでに定義すると、さらに各頂点に対して $a^2 = 1$ という関係式を入れてもっとわると、 Γ のコクスター群と呼ばれる群になります。

こんな群を導入するには、それなりの数学的背景があるわけですが、ここでは「半単純リー群に関するそうだ。」と思って、とりあえず先に進んでしまいます。(コクスター群については[5] を参照するにとどめます。アルティン群は Brieskorn [7] によって導入されたもので、グラフが Dynkin 図形の時には、それに対応する単純特異点の半普遍変形空間の、ファイバースムスローカスの基本群になっています。これについては、後で少々触れます。なぜアルティン群と名付けたかと Brieskorn に聞いたら、アルティンの Braid 群に良く似ていて、Braid じゃあないからだそうです。)

1.2. 写像類群. 写像類群の定義を思い起こしましょう。 $\Sigma_g^{n, }$ という記号で、種数 g 、境界 (の連結成分) が b 個、puncture (抜けている穴) が n 個空いている、向き付け可能曲面を表します。この時、この曲面の写像類群を、 $M_g^{n, }$ で表します。(0 は書くのを省略します。) この群は、この曲面の、向きを保つ可微分自己同相の群 (こいつは巨大すぎる) の、連結成分 (写像の集合に対してはコンパクトオープン位相をいれる) が作る群です。つまり、可微分自己同相のイソトピー同値類って言うやつです。境界については、境界上の点は全て固定し、抜けた穴も全て固定する同相写像のみを考えます。

連結成分をとったことから離散群になりますが、実は有限生成で、有限関係式による表示 (いわゆる有限表示) を持つことが McCool[18] らにより知られています。

なぜこの群が興味深いのかは、皆さんの方が僕よりも詳しいと思いますが、二言で言えばリーマン面のモジュライ orbifold という物理にも解析にも数論にも関わった対象の基本群であるという事実と、Hegaard 分解を経由して 3 次元多様体と密接に関連しているという事実の二つに起因するのではないかと思います。

有限表示とわかったらば、その表示を具体的に求めて見たくなるのが人情です。以下では、境界と puncture の個数の合計が 1 個以下、つまり $b+n \leq 1$ の場合だけを考えます。(原理的には一般の場合がこの場合に帰着できるのですが、一般の場合の具体的な表示は与えられていないようです。)

具体的な有限個の生成元を、Dehn, Lickorish, Humphries といった人達が求めました。それは、Dehn Twist と呼ばれる元による生成元です。Figure 2 のような写像、無理に極座標表示すれば半径 $1 \leq r \leq 2$ のアニュラス上の変換 $(r \cos \theta, r \sin \theta) \mapsto (r \cos(\theta + 2\pi(r-1)), r \sin(\theta + 2\pi(r-1)))$ 、のあたえる写像類を Dehn Twist といいます。これは、円筒 $\Sigma_0^{<2>}$ の写像類群 $M_0^{<2>}$ の元を与えますが、この写像類群はこの元で生成される自由巡回群であることが知られています。この元を、“Dehn Twist” と呼びます。

さて、境界付き曲面が他の曲面に埋め込まれている時には、普通に考えて前者の写像類群から後者の写像類群に自然な準同型を引き起こします。境界は点毎に固定したから (すごく細かい事を言うと 可微分ホモトピックに変形して境界付近で微分まで自明にする必要あり)、部分曲面の自己同相は全体に拡張できるわけです。

曲面 $\Sigma_g^{n, }$ の内部に存在する単純閉曲線 C に対し、 C のその曲面での環状近傍は円筒 $\Sigma_0^{<2>}$ ですから、上

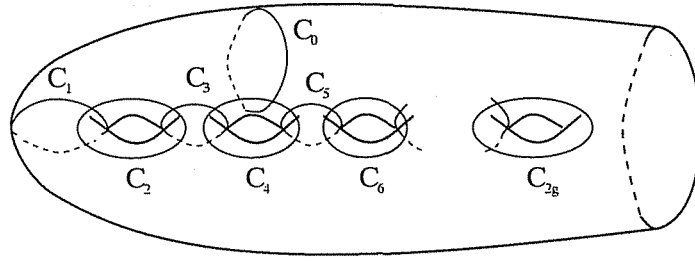


FIGURE 3. Dehn, Lickorish, Humphries による写像類群の生成元

の理屈により一つの $M_g^{n, }$ の元が定まります。これを、 C' に沿っての Dehn Twist と呼びます。Dehn, Lickorish, Humphries が求めた Dehn Twist による生成元は、Figure 3 に現れる $2g+1$ 個です。(但し、 $b+n \leq 1$ とします。) ちなみに、 $2g+1$ という数は、Dehn twist を使う限り最小の数です[13]。この結果の言っていることは、どんなひねくれた可微分同相写像を作ろうとも、この $2g+1$ 個の曲線に沿って次々とひねって行くだけで、いつかは (ホモトピーの意味で) 自明な写像に戻せる、というものです。証明は、かなり大変みたいです。

さて、では関係式はどうかというと、求まってはいるのですが証明はもっと大変です。基本的にはモース関数の変形の理論を使うようですが、僕は follow していません。ともかく、具体的な表示は Hatcher-Thurston[12], Harer[11], 最終版は Wajnryb[21] によって与えられました。(でも、ちょっと表示が間違っていて、訂正版が Birman-Wajnryb[4] にあります。ちなみに、この辺の下りは Birman の survey[2] が読みやすいのですが、そこの hyperelliptic involution も別の形で間違っているように思えます。)

その表示とは、次のようなものです。 c_0, c_1, \dots, c_{2g} を、Figure 3 の閉曲線に対応する Dehn twists $\in M_g^{<1>}$ としましょう。

Theorem 1.1 (Wajnryb). 写像類群 $M_g^{<1>}$ は次の様な表示を持つ。生成元： a_0, a_1, \dots, a_{2g} (これらは写像類群の c_0, c_1, \dots, c_{2g} に対応する) 関係式：

- (A): $a_i a_j = a_j a_i$ ($C_i \cap C_j = \emptyset$ の時), および $a_i a_j a_i = a_j a_i a_j$ ($C_i \cap C_j$ が一点集合の時)
- (B): ($g \geq 2$ で必要) $(a_1 a_2 a_3)^4 = a_0 (a_4 a_3 a_2 a_1 a_1 a_2 a_3 a_4)^{-1} a_0 (a_4 a_3 a_2 a_1 a_1 a_2 a_3 a_4)$.
- (C): ($g \geq 3$ で必要)

$$a_0 b_1 b_2 = a_1 a_3 a_5 b_3,$$

ここで

$$\begin{aligned} b_1 &:= (a_4 a_3 a_5 a_4) a_0 (a_4 a_3 a_5 a_4)^{-1}, \\ b_2 &:= (a_2 a_1 a_3 a_2) b_1 (a_2 a_1 a_3 a_2)^{-1}, \\ b_3 &:= (a_4^{-1} a_3^{-1} a_2^{-1} a_1^{-1} u a_2 a_3 a_4 a_5 a_6)^{-1} a_0 (a_4^{-1} a_3^{-1} a_2^{-1} a_1^{-1} u a_2 a_3 a_4 a_5 a_6), \\ u &:= (a_5 a_6) b_1 (a_5 a_6)^{-1} \end{aligned}$$

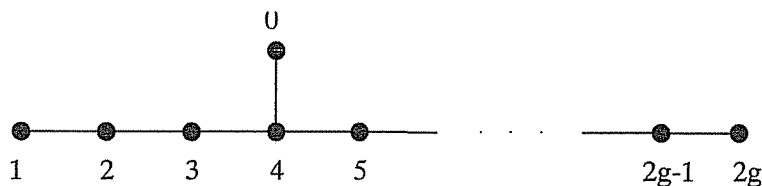
とおく。

さらに、境界無し閉曲面の写像類群 M_g の表示は、もう一つ *hyperelliptic involution* と呼ばれる関係式(D) を付け加えて得られる(ここでは省略する。[21][4] を参照のこと。訂正が[4] で入ったのはこの関係式)。この関係式のみが g に依存して長くなる。

対応する絵の形により、この4つの関係式(A), (B), (C), (D) はそれぞれ *braid*, *chain*, *lantern*, *hyperelliptic* 関係式と呼ばれています。これらの関係式がなぜ成り立つかは、Birman のサーベイ[2] に載っている絵を見ながら地道に曲面の基本群への作用を計算すると納得できないこともありませんが、この関係式で十分だということは僕自身は follow できていません。

さて、ここで関係式(A)を見たら、アルティン群を思い浮かべるのが自然でしょう。実際、関係式(A)は、アルティン群から写像類群への準同型

$$\rho_1 : A(T_g) \rightarrow M_g^{<1>}$$

FIGURE 4. The graph T_g

が存在すると言っているに他なりません。ここに T_g は、Figure 4 に示されたグラフです。それぞれの番号の頂点を、それぞれの番号の Dehn Twist に対応させて、アルティン群からの準同型となる必要十分条件が、(A) が成り立つことなわけです。そして、Dehn-Lickorish-Humphries の「生成元」という性質は、 ρ_1 が全射だと言っているわけです。そして、Wajnryb らの結果は、そのカーネルが正規部分群として (B), (C) で生成されるといっており、さらに $A(T_g) \rightarrow M_g$ まで行って増えるカーネルの部分は (D) を付け加えて正規部分群としての閉包をとればよいと言っているわけです。

ここまではただの言い換えです。問題は、(B), (C) といった関係式が、アルティン群というものを導入してわかりやすく言い換えられるだろうか、というものです。結論からいうと答えは Yes で、(B), (C), (D) のいずれもが部分アルティン群の中心の言葉で簡明に述べることができます。

1.3. アルティン群による写像類群の表示. そのためには、アルティン群の構造に関する基本的な言葉を導入しないといけません。

まず、グラフ Γ に対して、その誘導部分グラフ H (full 部分グラフとも呼ばれる。つまり、 H は Γ の頂点の部分集合を一つ決めると決まり、決まりかたは、その部分集合の中に両端の入っている辺は全部 H にも入れてしまうことで定まる) があると、自然に準同型 $A(H) \rightarrow A(\Gamma)$ が定まりますが、これが単射だと Van der Lek[9] により証明されているので (単射性は以下の議論で使いませんが)、 $A(H)$ を $A(\Gamma)$ の (H に伴う) 部分アルティン群と呼びます。

関係式 (B)(C)(D) は、それぞれ T_g の、ある Dynkin 部分グラフにともなう部分アルティン群の中心の生成元の言葉で書き表されます。それを述べるために、Dynkin 図形のアルティン群に対してのみ証明されている、次の定理 (Brieskorn-斎藤 恭司[8], Satz 7.1, Satz 7.2 とその Zusatz.) をまず述べましょう。(Dynkin および拡張 Dynkin 図形以外の、一般のグラフに対するアルティン群の研究も行われていますが、それほど構造が良くわかっていないようです。)

Γ を、既約ルートの Dynkin diagram、すなわち $A_n, B_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2, H_3, H_4, I_2(p)$ のうちのどれかとします。(対応するグラフは、例えば[5]。これを見なくても、以下を読むのに全く差し支えありません。)

対応する生成元 a_i に対し、その語 (すなわち生成元とその逆元の、ただの列) w が **positive** であるとは、 a_i^{-1} の形の元を含まないこととします。空の語も **positive** とします。**positive** な語と群の元として同じになる群の元を、**positive な表示をもつ**、ということにします。

Theorem 1.2 (Brieskorn-斎藤). Γ を Dynkin 図形とする。 $w \in A(\Gamma)$ に対し、次の性質を考える。

- w は a_j の積として **positive** な表示をもつ。
- 全ての a_i に対して、 $a_i^{-1}w$ はなお **positive** な表示をもつ。

すると、この二つの性質を満たす群の元の中で、もっとも小さいものがある。すなわち、 $\Delta(\Gamma)$ という群の元であって、**positive** な表示をもち、他に上の二つの性質をもつ w があつたら、 $\Delta(\Gamma)^{-1}w$ は **positive** な表示を持つものが存在する。

$\Delta(\Gamma)$ の存在は、対応するコクスター群の有限性をここにして、組合せ群論的に証明されます (僕はその真髄を理解していません)。 $a_i^{-1}w$ が **positive** な表示を持つ時に「 a_i が w を割り切る」と考えるなら、 $\Delta(\Gamma)$ は a_i 全ての「最小公倍数」です。 $\Delta(\Gamma)$ の幾何的意味については、あとでちょっと触れます。

$\Delta(\Gamma)$ は、次の性質を持ちます。

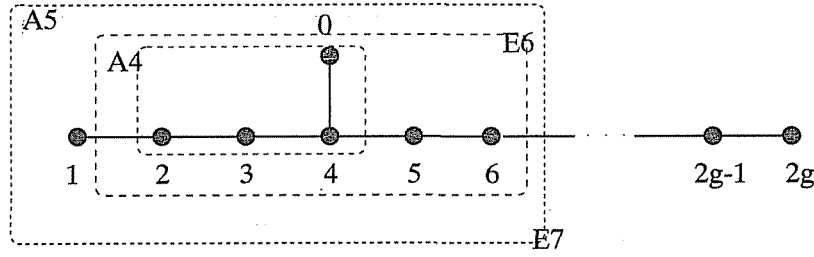


FIGURE 5. 関係式 (b),(c) を与える部分アルティン群

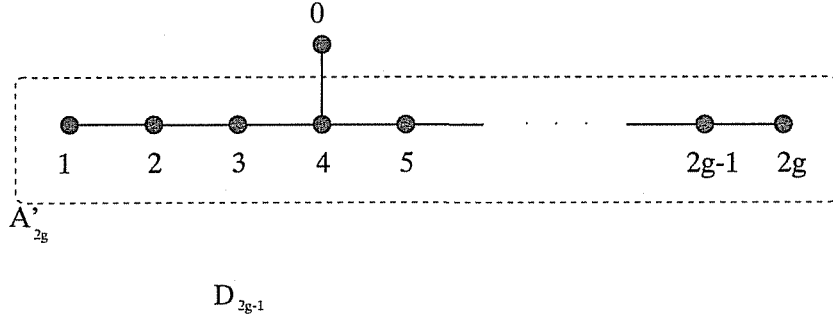


FIGURE 6. 関係式 (d),(e) を与える部分アルティン群

- (i) $\Delta(\Gamma)$ のコクスター群 (慣例にしたがって、Dynkin 図形の場合はワイル群と呼びます) での像は、最長元 w_0 となる (生成元で書いて長さが最大になる元のことですが、以下ではそれほど重要ではありません。その長さは、positive roots の数に一致します)。
- (ii) $A(\Gamma)$ の中心は、自由巡回群であり、その生成元 $c(\Gamma)$ は (二つあるがそのうちの一つは) 次の公式で与えられる。 $c(\Gamma) = \Delta(\Gamma)^2 = \Pi^h$ ($w_0 \neq -1$ の時)、 $c(\Gamma) = \Delta(\Gamma) = \Pi^{h/2}$ ($w_0 = -1$ の時)。ここに、 h はルート系の Coxeter number で、 Π は生成元である a_j を好きな順番で一つずつ全部掛けたもの。

上でいっていることには、 Π は掛け算の順番に依存するが、 Π^h は依存しないことを含みます。 $w_0 = -1$ といっているのは、ワイル群は $GL(\Gamma)$ の部分群ですから、最長元が -1 倍というスカラー行列になるかどうかです。コクスター数 h については、ルート数を生成元の数で割ったもの、と思ってもらっていいのですが、何にせよ [5] を見れば全部表に載っているものです。ですから、以下を読むのには障害になりません。

さて、上の理屈により、グラフ T_g の誘導部分グラフとして現れる Dynkin 図形 Γ ごとに、群準同型

$$A(\Gamma) \rightarrow A(T_g)$$

が得られます。これによる $c(\Gamma)$ の像を、記法の濫用により再び $c(\Gamma) \in A(T_g)$ で表します。すると、主定理は次のように表されます。

T_g の部分グラフとして現れる Dynkin 図形の中で、次の 4 + 2 種類のものを考えます。その 1 : Figure 5 に書き込まれた A_4 , A_5 , E_6 , E_7 のうちのどれか。その 2 : Figure 6 に書き込まれた A'_{2g} , D_{2g-1} のいずれか。(図から見てとれるグラフが、その型の Dynkin 図形ですから、図形とその名前の対応もこの図から読み取れます。)

Theorem 1.3. 関係式 (A) のもとで、Theorem 1.1 の (B) は

$$(b) \quad c(A_5) = c(A_4)^2$$

と同値。関係式(A) と (b) のもとで、関係式(C) は

$$(c) \quad c(E_7) = c(E_6)$$

と同値。関係式(A), (b), (c) のもとで、関係式(D) は

$$(d) \quad a_1^{2g-2} = c(D_{2g-1})$$

と同値。 M_g^1 の表示は関係式(A), (b), (c), および

$$(e) \quad c(A'_{2g})^2 = 1$$

で与えられる。

言い換えると、 $A(T_g)/[(b), (c)] \cong M_g^{<1>}$, $A(T_g)/[(b), (c), (e)] \cong M_g^1$, $A(T_g)/[(b), (c), (d)] \cong M_g$.

Remark 1.1. 具体的にこれらの関係式を書き下しても、簡明なものになっている。

$$\begin{aligned} c(A_4) &:= (a_0 a_2 a_3 a_4)^5 \\ c(A_5) &:= (a_0 a_1 a_2 a_3 a_4)^6 \\ c(E_6) &:= (a_0 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6)^{12} \\ c(E_7) &:= (a_0 a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6)^9 \\ c(A'_{2g}) &:= (a_1 a_2 a_3 a_4 \cdots a_{2g})^{2g+1} \\ c(D_{2g-1}) &:= (a_0 a_3 a_4 a_5 \cdots a_{2g})^{4g-4} \end{aligned}$$

を代入すれば良いし、カッコの中の元の掛け算の順番にはよらない。

Remark 1.2. Looijenga は、京都での筆者とのこの結果のコミュニケーションの後、独立に純代数幾何的な方法で (つまり Hatcher-Thurston を使わず) M_3^1 の似たような表示を求めることに成功している。彼の方法は平面 4 次曲線のモジュライ空間と種数 3 の超楕円曲線の張り合わせで種数 3 代数曲線のモジュライが得られる [17] ことにもとづく (現在 preprint) ものである。こちらの方向から、一般の種数での純代数幾何的な証明が得られればとても面白いと思う。))

2. 証明のあらすじ

2.1. なぜそうなると信じたか. 細かいことは論文を見て頂くとして、ここではなぜアルティン群のセンターで書けると思いはじめたかをいいます。最初は $g = 3$ に集中していました。 $g = 2$ の時は、Birman-Hilden [3] により、6 本系の組み紐群の商として写像類群を書くと、(みんな気づいていたのかもしれませんが例えば Jones [16] §10 参照) 6 本系の組み紐群と 5 本系の組み紐群のセンターの言葉でカーネルが表されます。 $g = 3$ では E_7 アルティン群から写像類群への全射があることがすぐわかりますが、境界無し写像類群は中心が自明ですから、少なくとも $c(E_7)$ の像は自明になります。 $c(E_6)$ の像は、6 つの Dehn Twist と可換であり、これは E_6 を形作る閉曲線の合併の環状近傍の写像類群に入るはずで、かなり特殊な形をしているはずです (だって、Dehn Twist と可換ですよ)。

それで、多分関係式はセンターで書けるんだろうなあと考えていましたが、どうやって計算したらいいかわからないでいたところ、とある機会に斎藤恭司と話す機会 (試験の採点) があり、「アルティン群には Normal form がある」と聞き、それを使ったらなんとかできました。

2.2. Normal form と計算機. [8] の面白いところの一つは、Dynkin 図形に対応するアルティン群の任意の元 w を部分アルティン群の Δ の積に一意に分解するアルゴリズムを与えている点です。その分解は、 $w = \Delta(\Gamma)^{-n} \Delta_1 \Delta_2 \cdots \Delta_s$ の形のもので、 n は $\Delta(\Gamma)^n w$ を positive にする最小の整数 n 、 Δ_1 は $\Delta(\Gamma)^n w$ を割る全ての生成元 a_i たちの張る部分アルティン群 (対応する図形が連結とは限らないが、それでもうまく行く) の Δ であり、以下帰納的に定義されます。

この Normal form を求めるアルゴリズムを LISP で書きました。(b) と (B) の同値性はとても簡単ですが、(c) と (C) は実はそのままでは同値ではありません。Wajnryb の関係式 (C) をいろいろな元で毎日共役をとっては関係式 (B) で置き直す、という作業を数か月つづけて、ある日偶然に (c) が求まりました。(今のところ、(C) を 132 個の Dehn Twists で共役をとり、一回 (B) を使うと (c) になる、という証明です。)

2.3. 最後の詰め: Hyperelliptic involution. しかし、一番簡単に思えた関係式 (D) がなかなかセンターの言葉で書けません。種数 3 でさえ、計算機を使ってもうまくいかないし、一般種数ではアルゴリズムそのものがありません。そこで、初心に戻って、「アルティン群の幾何的意味」を使おうと思いました。

何の準備もなく結果だけ言うと、「 Γ を A, D, E 型の Dynkin 図形とし、 $F \rightarrow B$ を対応する有理特異点 (複素代数曲線上の) の半普遍変形空間とする。この時、 B のファイバースムースローカスの基本群は対応するアルティン群となり、ミルナーファイバーへの Geometric Monodromy は対応する Dehn Twists で記述される。 Δ の作用は、 B に入る \mathbb{C}^* 作用から自然に記述され、境界に沿った Dehn Twists の積になる。」という事実を使います。

A, D, E 全ての場合について Δ の写像類群への作用を具体的に書き表しました (特異点の専門家には簡単なことなのかも知れませんが、それについては [20] を参照して頂くということで、ここでは実際に必要である D_{2g-1} 特異点のみを例にとり解説します。

曲線上の D_n 型特異点というのは、 $x(x^{n-2} + y^2) = 0$ で与えられる特異点です。Brieskorn の理論 [6] により、この特異点の半普遍変形空間は、ある重みつき斉次多項式

$$F(x, y; s_1, \dots, s_n) = 0$$

で与えられた $n+1$ 次元多様体が、 (s_1, \dots, s_n) という n 次元ユークリッド空間に乗っかっている、アフライン曲線の族により与えられます。 $s_1 = \dots = s_n = 0$ でのファイバーが $x(x^{n-2} + y^2) = 0$ となります。このファミリーを $F \rightarrow B$ と書きます。

この空間の構成の方法は詳しくは述べませんが、 n 次元アフライン空間 $\bar{B} := \text{Spec} \mathbb{C}[t_1, \dots, t_n]$ を考え、その上に、あるファミリーを乗せ、 D_n 型ワイル群を自然に作用させ、その商空間を B とするのです。環でいえば、 $\mathbb{C}[t_1, \dots, t_n]$ の不変式環の基本不変式 (対称群でいうと、基本対称式のことです) を $(P_1(t), \dots, P_n(t))$ とし (各々は n 変数斉次多項式)、 $(t_1, \dots, t_n) \mapsto (P_1(t), \dots, P_n(t))$ で $F \rightarrow B$ を引き戻してやる、つまり

$$F(x, y; P_1(t), \dots, P_n(t)) = 0$$

を考えてやるということです。こうすると、 t 空間の方では特異なファイバーが載っているのはちょうどワイル部屋の壁となります。一部屋に n 個の壁があるのですが、それぞれの境界に載っているファイバーは一点 pinched Riemann surface になり、その壁を越えるごとに、ファイバーへの幾何的モノドロミーとして、対応する vanishing cycle での Dehn twist が引き起こされます。(\bar{B} では壁を越えて別のワイル部屋に動く道が、下の空間 B では閉じた道になっていることに注意して下さい。) さて、これらの壁は基本ルートに対応しており、Dynkin 図形の頂点と対応しているのですが、対応する vanishing cycle の単純閉曲線の交わり方が、ちょうど Dynkin 図形と同じ形になっていることが示されます。(A'Campo の real deformation の理論 [1] を使うと簡単にわかるらしいですが、僕には follow できないので石田 敦の結果 [14] を使いました。) そして、Brieskorn は、 B の中でファイバーがスムーズなものの作るローカス B° の基本群がアルティン群 $A(D_n)$ であるということも証明しています [7]。ではそこで、 Δ は何なのでしょう。 \bar{B} には全ての t_i を定数倍するという \mathbb{C}^* 作用がありますが、これで一点 $t_0 \in \bar{B}$ から始めて $\exp(2\pi i u) t_0$ ($u: 0 \rightarrow 1/2$) で半回転させてやると、閉じていない道ができます。その B での像は閉じた道になることがわかります。この道が Δ なのです。あとは、この Δ を計算してやればいいのですが、話を簡単にするため Δ^2 を計算することにしましょう (この差は結構微妙で、[20] では上半平面などを持ち出す羽目になりましたが、特異点の専門家からすれば簡単なのかもしれません)。 $\exp(2\pi i u) t_0$ で変形するといっても、 $F(x, y; P_1(t), \dots, P_n(t)) = 0$ は斉次多項式ですから、下の空間の道の、曲線のファミリーへのリフトとし

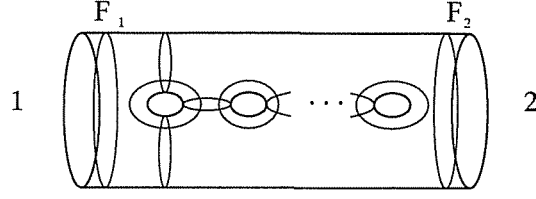
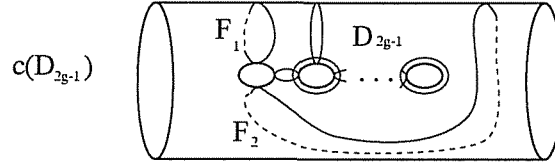
FIGURE 7. n が奇数の時の D_n 

FIGURE 8. その Humphries 生成元でのありよう

て、 $(\exp(m_x 2\pi i u)x, \exp(m_y 2\pi i u)y; P_1(\exp(2\pi i u)t_0), \dots, P_n(\exp(2\pi i u)t_0))$ をとってやれば、ファイバーは全く変形しないでもとに戻ってしまいます。(ここで m_x, m_y は t_i を一次と見て、 F を重みつき斉次多項式と見た時の x, y の重み。)。では、どこでモノドロミーが出て来るかと言うと、ミルナーファイバーを考えるところです。

つまり、代数幾何を離れて、トータルスペースを原点中心の閉球でちょん切ります。各ファイバーは、位相的には境界つき閉曲面となります。ここで、境界には無限遠点の近傍からくる自明な直積化を入れておいて、その意味で境界を固定してファイバーへのモノドロミーを見るのが Geometric Monodromy です。つまり、この場合は

$$A(D_n) = \pi_1(B^\circ) \rightarrow M_g^{}$$

が与えられます。ここに、 b は無限遠点の個数、 g はスモースファイバーの種数です。(例えば n が奇数の時には、 $x=0$ と $x^{n-2}+y^2=0$ のそれぞれから一つずつ、合計 2 個無限遠点があり、種数はちよつと計算すれば $(n-1)/2$ です)。境界をとめるためには、各無限遠点の周りで Dehn Twists をしてやる必要があります。その回数は、各無限遠点を定義する局所パラメータが、 x, y の何次の多項式かを見ればわかります。Brieskorn の計算[6] で、 (x, y) の重みはそれぞれ $(2, n-2)$ であり、 $x=0$ の方から来る無限遠点の局所パラメータ $1/y$ の重みは $-(n-2)$ 、 $x^{n-2}+y^2=0$ の方から来る無限遠点のパラメータは、 x 直線上でこの曲線が (n が奇数だから) 2 位で分岐していることを考えると、重み -1 となります。この回転を押えて境界を止めるためには、各々の境界で Dehn Twists をそれぞれ $(n-2)$ 回、1 回施さなくてはなりません。こうして、Figure 7 において Dehn Twist の積 $F_1^{n-2} F_2$ が、 $c(D_n) = \Delta(D_n)^2$ の Geometric Monodromy であることが分かりました。

絵を、Dehn-Lickorish-Humphries Generator のなかに無理に埋めると Figure 8 になります。既に relation (b).(c) で境界一個つきの曲面の写像類群は求められており、簡単な考察[21] から $F_1 = F_2$ となる関係式を加えれば境界のない写像類群が求まることがわかります。 $F_1^{2g-3} F_2 = c(D_{2g-1})$ を使えば、それには (d) で十分だとわかります。

その他の特異点変形の Δ のモノドロミーもトポロジー的に面白いと思います。例えば、 $\Delta(E_6)$ は水平方向の half Dehn Twist を与え、これが Humphries[13] が生成元を減らすのに用いた元の正体であることをコメントしておきます。

謝辞. この研究にあたって、たくさんの人が色々なことを初歩から教えて下さいました。アルティン群の存在そのものを教えてくれた斎藤 恭司先生、特異点変形に関するコメントをくれた E. Brieskorn 先生、P. Slodowy 先生、全体に関連した成果を教えてくれた E. Looijenga 先生、そもそもの動機である写像類群の研究を喚起してくれた織田 孝幸先生に感謝します。この研究は種数 3 写像類群へのガロア作用を調べた研

究である[19]の延長にあり、その研究は組み紐群へのガロア作用を研究した伊原康隆先生との共同研究[15]に動機付けられており、数学の門へと僕を導き入れて下さった伊原先生に謝辞を述べたいと思います。

REFERENCES

1. N. A'Campo. *Le groupe de monodromie du dépliement des singularités isolée de courbes planes I*. Math. Ann. 213 (1) 1–32 (1975).
2. J.S. Birman. *Mapping class groups of surfaces*. Contemporary Mathematics **78** 13–43 (1988).
3. J.S. Birman and H. Hilden. *Isotopies of homeomorphisms of Riemann surfaces and a theorem about Artin's braid group*. Ann. of Math. **97**, 424–439 (1973).
4. Joan S. Birman and B. Wajnryb. *Errata: Presentations of the mapping class group*. Israel. J. Math. **88**, 425–427 (1994).
5. N. Bourbaki. "Groupes et algèbres de Lie. IV. V. VI" Éléments de Mathématique. 1972
6. E. Brieskorn. *Singular elements of semisimple algebraic groups*, in Actes Congrès Intern. Math. 1970. t. 2. 279–284.
7. E. Brieskorn. *Die Fundamentalgruppe des Raumes der regulären Orbits einer endlichen komplexen Spiegelungsgruppe*. Inventiones Math. **12**, 57–61 (1971).
8. E. Brieskorn and K. Saito. *Artin Gruppen und Coxeter Gruppen*. Invent. Math. **17**, 245–271 (1972).
9. H. van der Lek. *Extended Artin groups*. Proc. Symp. Pure Math. 40–Part 2. 117–121 (1983).
10. F.A. Garside. *The braid group and other groups*. Quart. J. Math. Oxford, 2.Ser. **20**, 235–254 (1969)
11. J. Harer. *The second homology group of the mapping class group of an orientable surface*, Invent. Math. **72**, 221–239 (1983).
12. A. Hatcher and W. Thurston. *A presentation for the mapping class group of a closed orientable surface*, Topology **19**, 221–237 (1980).
13. S.P. Humphries. *Generators for the mapping class group*. Topology of low-dimensional manifolds (Proc. Second Sussex Conf., Chelwood Gate, 1977) Lecture Notes in Math. **722**, 44–47, 1979.
14. A. Ishida. *The structure of subgroup of mapping class groups generated by two Dehn twists* Proceedings of the Japan Academy **72**, Ser. A. No.10 240–241 (1996).
15. Y. Ihara and M. Matsumoto. *On Galois Actions on Profinite Completions of Braid Groups*, in AMS Contemporary Math. **186** "Recent Developments in the Inverse Galois Problem." 173–200 (1994).
16. V.F.R. Jones. *Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials*, Annals of Mathematics. **126** (1987). 355–388.
17. E. Looijenga. *Cohomology of \mathcal{M}_3 and \mathcal{M}_3^1* . Contemporary Mathematics **150** 205–228 (1993).
18. J. McCool. *Some finitely presented subgroups of the automorphism group of a free group*, J. Algebra **35**, 205–213 (1975).
19. M. Matsumoto. *Galois group $G_{\mathbb{C}}$ Singularity E_7 . and Moduli \mathcal{M}_3* London Math. Soc. Lecture Note Series **243** Geometric Galois Actions 2. The Inverse Galois Problem. Moduli Spaces and Mapping class Groups. 1997 (179–218).
20. M. Matsumoto "A presentation of mapping class groups in terms of Artin groups and geometric monodromy of singularities" submitted. Max Planck Institut Preprint 97-74 (1997)
21. B. Wajnryb. *A simple presentation for the mapping class group of an orientable surface*, Israel J. Math. **45**, 157–174 (1983).

慶応大学理工学部数理科学科

E-mail address: matumoto@math.keio.ac.jp

RACKS OF CORDS ¹

Seiichi KAMADA ^a, and Yukio MATSUMOTO ^b

^a*Department of Mathematics, Osaka City University,
Osaka 558-8585, Japan*

^b*Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo,
Tokyo 153-8914, Japan*

Abstract

A rack is a non-empty set with a binary operation such that right multiplication is an automorphism. New racks closely related to the braid groups and the mapping class groups will be introduced using “cords” on surfaces, and their structure will be investigated. Emphasis will be laid on the racks of cords on the plane and the sphere. In particular, their presentations and the center of the associated group of the rack of cords on the sphere will be given.

Keywords: Rack, braid group, mapping class group

AMS classification: 57M25, 57N05, 20F36

1 Introduction

A rack is a non-empty set with a binary operation such that right multiplication is an automorphism. In general, the binary operation is not associative and a rack is very different from a group. A typical example of a rack is the quandle of a knot due to D. Joyce [11], which classifies the knot up to mirror image. This is generalized to the fundamental racks of codimension-two links by R. Fenn and C. Rourke [8].

In this paper, we introduce certain racks closely related to the braid groups and the mapping class groups, and investigate their structure. They can be expected to play a fundamental role in the monodromy calculus appearing

¹ This research is supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (No. 10440015), Ministry of Education, Science and Culture, Japan.

in 4-dimensional topology; in particular, in surface braids and in Lefschetz fibrations.

Let Σ be a connected oriented 2-manifold and let Q_{n+1} be a set of $n+1$ interior points of Σ : $Q_{n+1} = \{q_1, q_2, \dots, q_{n+1}\}$, where $n+1 \geq 2$. A *cord* on (Σ, Q_{n+1}) is a simple curve (un-directed) on $\text{int}(\Sigma)$ whose endpoints are distinct points of Q_{n+1} . We assume that the curve is disjoint from Q_{n+1} except at the endpoints (see Figure 1).

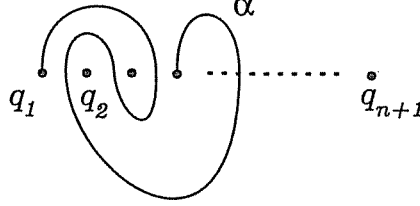


Fig. 1.

We denote by $M_{n+1}(\Sigma)$ the mapping class group of (Σ, Q_{n+1}) , that is, the group of isotopy classes of orientation-preserving homeomorphisms of (Σ, Q_{n+1}) onto itself whose restrictions to the boundary $\partial\Sigma$ are the identity map.

For a cord α on (Σ, Q_{n+1}) , we denote by $\tau[\alpha] \in M_{n+1}(\Sigma)$ the *disk twist* on α , which means the isotopy class of a homeomorphism of (Σ, Q_{n+1}) whose support is a disk neighbourhood of α in which it gives a “180°-twist” interchanging the endpoints of α .

Two cords α and α' are *isotopic* if they are ambient isotopic by an isotopy of Σ relative to Q_{n+1} and $\partial\Sigma$. Let $X_{n+1}(\Sigma)$ be the set of isotopy classes of cords on (Σ, Q_{n+1}) . We will use the same symbol for a cord and its isotopy class. Notice that the element $\tau[\alpha] \in M_{n+1}(\Sigma)$ is well-defined for $\alpha \in X_{n+1}(\Sigma)$.

Definition 1 *A non-empty set X with a binary operation \wedge is a rack if the following two axioms are satisfied:*

- (1) *For each $b \in X$, the mapping $X \rightarrow X$ defined by $a \mapsto a \wedge b$ is bijective.*
- (2) *$(a \wedge b) \wedge c = (a \wedge c) \wedge (b \wedge c)$ for all $a, b, c \in X$.*

The notion of racks (under different terminology) has been repeatedly discovered and discussed by several authors from various points of view, see [18], [11], [17], [4], [14], [8]. We follow the terminology of Fenn and Rourke [8] although we use different notation for the rack operation. (The notation a^b proposed by Fenn and Rourke [8] is quite ideal from mathematical viewpoint, however it becomes somewhat inconvenient when b is written in a complicated form. In a sense, our notation $a \wedge b$ adopts their proposal because this notation is similar

to the tex command for a^b .)

Let X be a rack, and let $F(X)$ denote the free group generated by all elements of X . Let N be the normal subgroup of $F(X)$ consisting of those elements $w \in F(X)$ such that $a \wedge w = a$ for all $a \in X$. Note that $a \wedge w$ makes sense for $a \in X$ and $w \in F(X)$, see [8]. The *operator group* of X is the quotient group $F(X)/N$, which is denoted by $Op(X)$. Let K be the normal subgroup of $F(X)$ generated by $(a \wedge b)b^{-1}a^{-1}b$ for all $a, b \in X$. The *associated group* of X is the quotient group $F(X)/K$, which is denoted by $As(X)$. The axioms of a rack imply that $K \subset N$, and we have a natural surjection $As(X) \rightarrow Op(X)$ (for details, see [8]).

Let $X_{n+1}(\Sigma)$ be the set of isotopy classes of cords on (Σ, Q_{n+1}) as defined above. We make the set $X_{n+1}(\Sigma)$ a rack by giving a binary operation \wedge as follows:

$$\alpha \wedge \beta = (\alpha)\tau[\beta],$$

where we assume that $M_{n+1}(\Sigma)$ acts on $X_{n+1}(\Sigma)$ from the *right* and that for $\tau_1, \tau_2 \in M_{n+1}(\Sigma)$ the composition $\tau_1\tau_2$ means the mapping class which is obtained by applying τ_1 first and then τ_2 . It is left to the reader to verify that this operation \wedge satisfies the two axioms of a rack.

The purpose of this paper is to prove the following theorems.

Theorem 2 *If $n + 1 \geq 3$ and $\Sigma = \mathbb{R}^2$ or S^2 , then the operator group $Op(X_{n+1}(\Sigma))$ is isomorphic to the mapping class group $M_{n+1}(\Sigma)$.*

Theorem 3 *The associated group $As(X_{n+1}(\mathbb{R}^2))$ is isomorphic to Artin's $n + 1$ -string braid group B_{n+1} .*

Theorem 4 *The associated group $As(X_{n+1}(S^2))$ is isomorphic to the quotient group of B_{n+1} divided by the relations*

$$u\sigma_i = \sigma_i u \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

where $u = \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_{n-1}\sigma_n^2\sigma_{n-1} \dots \sigma_2\sigma_1$.

Remark. In [7] it is proved that the $n + 1$ -string braid group $B_{n+1}(S^2)$ of the 2-sphere S^2 is isomorphic to the quotient group of B_{n+1} divided by the relation

$$u = 1.$$

On the other hand in the associated group $As(X_{n+1}(S^2))$, the element u has infinite order, because by Theorem 4 the abelianization of $As(X_{n+1}(S^2))$ is an infinite cyclic group in which u is not the identity. Thus there exists a central

extension

$$1 \rightarrow \langle u \rangle \rightarrow As(X_{n+1}(S^2)) \rightarrow B_{n+1}(S^2) \rightarrow 1.$$

Theorem 5 *The rack $X_{n+1}(\mathbb{R}^2)$ of cords on (\mathbb{R}^2, Q_{n+1}) has the following presentation:*

(1) *Generating set:*

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$$

(2) *Defining relations:*

$$\gamma_i \wedge \gamma_i = \gamma_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

$$\gamma_i \wedge \gamma_j = \gamma_i \quad (|i - j| > 1) \quad (2)$$

$$(\gamma_i \wedge \gamma_j) \wedge \gamma_i = \gamma_j \quad (|i - j| = 1). \quad (3)$$

Theorem 6 *The rack $X_{n+1}(S^2)$ of cords on (S^2, Q_{n+1}) has the following presentation:*

(1) *Generating set:*

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$$

(2) *Defining relations:*

$$\gamma_i \wedge \gamma_i = \gamma_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4)$$

$$\gamma_i \wedge \gamma_j = \gamma_i \quad (|i - j| > 1) \quad (5)$$

$$(\gamma_i \wedge \gamma_j) \wedge \gamma_i = \gamma_j \quad (|i - j| = 1) \quad (6)$$

$$\gamma_1 \wedge (\gamma_2 \dots \gamma_n) = \gamma_n \wedge (\gamma_{n-1} \dots \gamma_1). \quad (7)$$

The next two theorems are valid for a general connected oriented 2-manifold Σ , not necessarily \mathbb{R}^2 or S^2 .

Theorem 7 *The map $\tau : X_{n+1}(\Sigma) \rightarrow M_{n+1}(\Sigma)$ is injective.*

Corollary 8 *The natural map $\eta : X_{n+1}(\Sigma) \rightarrow As(X_{n+1}(\Sigma))$ is injective.*

Proof. The mapping $\tau : X_{n+1}(\Sigma) \rightarrow M_{n+1}(\Sigma)_{\text{conj}}$ is a rack homomorphism, where $M_{n+1}(\Sigma)_{\text{conj}}$ is the conjugation rack of $M_{n+1}(\Sigma)$ (cf. [8]). Thus by universality of the associated group [8], τ splits through η :

$$\tau : X_{n+1}(\Sigma) \xrightarrow{\eta} As(X_{n+1}(\Sigma)) \xrightarrow{T_{\sharp}} M_{n+1}(\Sigma).$$

The injectivity of η follows from the injectivity of τ . ■

Theorem 9

$$Op(X_{n+1}(\Sigma)) \cong As(X_{n+1}(\Sigma)) / \text{Center} As(X_{n+1}(\Sigma)).$$

We return to the case of S^2 . Our final theorem gives the structure of the center of the associated group $As(X_{n+1}(S^2))$. Here we assume the presentation of $As(X_{n+1}(S^2))$ as in Theorem 4.

Theorem 10 *Suppose $n + 1 \geq 3$. $\text{Center}As(X_{n+1}(S^2))$ is generated by $u = \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_{n-1}\sigma_n^2\sigma_{n-1} \dots \sigma_2\sigma_1$ and $v = (\sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_n)^{n+1}$. Both the generators have infinite order, and satisfy a single relation $u^{n+1} = v^2$.*

The racks $X_{n+1}(\mathbb{R}^2)$ and $X_{n+1}(S^2)$ introduced in this paper can be expected to play a fundamental role in the monodromy calculus appearing in 4-dimensional topology, for example, in surface braids [12] or in Lefschetz fibrations [15]. Also these racks are considered to provide a natural mathematical framework for the “quantum inverse” introduced in [16]. Racks and quantum inverse will be fully discussed in a forthcoming paper [10].

The construction of the racks of cords was announced by the second author in a talk at Conference on Low Dimensional Topology, University of Sussex, April, 1997.

After finishing the last draft of this paper, Luis Paris informed us of P. Dehornoy’s paper [19], in which Dehornoy finds an interesting connection between free left distributive systems (closely related to free racks) and braids which is different from ours. The authors thank L. Paris for this information and useful comments.

2 Operator groups of $X_{n+1}(\mathbb{R}^2)$ and $X_{n+1}(S^2)$

Let Σ be \mathbb{R}^2 or S^2 . Take a system of cords $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ on (Σ, Q_{n+1}) such that the endpoints of γ_i are q_i and q_{i+1} and such that $\gamma_i \cap \gamma_j \subset Q_{n+1}$ for $i \neq j$. We will fix this system in what follows.

Proof of Theorem 2. Let $\tau : F(X_{n+1}(\Sigma)) \rightarrow M_{n+1}(\Sigma)$ be a homomorphism defined by

$$\alpha_1^{\epsilon_1} \dots \alpha_s^{\epsilon_s} \mapsto \tau[\alpha_1]^{\epsilon_1} \dots \tau[\alpha_s]^{\epsilon_s},$$

where $\epsilon_i \in \{\pm 1\}$ and $\alpha_i \in X_{n+1}(\Sigma)$. This is a surjective homomorphism because $\tau[\gamma_1], \dots, \tau[\gamma_n]$ generate the mapping class group $M_{n+1}(\Sigma)$. We will prove that $\ker \tau$ coincides with the normal subgroup N of the free group $F(X_{n+1}(\Sigma))$ defined in Section 1.

If $w = \alpha_1^{\epsilon_1} \dots \alpha_s^{\epsilon_s}$ is in $\ker \tau$, then $\tau[\alpha_1]^{\epsilon_1} \dots \tau[\alpha_s]^{\epsilon_s} = 1 \in M_{n+1}(\Sigma)$. This

implies that for any $\alpha \in X_{n+1}(\Sigma)$, $\alpha \wedge w = (\alpha)\tau[\alpha_1]^{\epsilon_1} \dots \tau[\alpha_s]^{\epsilon_s} = \alpha$. Thus, $w \in N$ by the definition of N .

Conversely, if $w = \alpha_1^{\epsilon_1} \dots \alpha_s^{\epsilon_s}$ is in N , then for any $\alpha \in X_{n+1}(\Sigma)$, $\alpha = \alpha \wedge w = (\alpha)\tau[\alpha_1]^{\epsilon_1} \dots \tau[\alpha_s]^{\epsilon_s}$. In particular, $\tau[\alpha_1]^{\epsilon_1} \dots \tau[\alpha_s]^{\epsilon_s}$ preserves $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in X_{n+1}(\Sigma)$. If $n+1 \geq 3$ and $\Sigma = \mathbb{R}^2$ or S^2 , this means in turn that $\tau[\alpha_1]^{\epsilon_1} \dots \tau[\alpha_s]^{\epsilon_s}$ is isotopic to the identity through an isotopy of (Σ, Q_{n+1}) . Thus, $w \in \ker \tau$. Hence $\ker \tau = N$, and we have $M_{n+1}(\Sigma) \cong F(X_{n+1}(\Sigma))/N = Op(X_{n+1}(\Sigma))$. ■

3 Associated group of $X_{n+1}(\mathbb{R}^2)$

Let Σ be \mathbb{R}^2 or S^2 . If $\Sigma = S^2$, then we assume that Σ is the one-point compactification of \mathbb{R}^2 . In this section we assume for simplicity that the points in Q_{n+1} are given by $q_1 = (0, 0), q_2 = (1, 0), \dots, q_{n+1} = (n, 0) \in \mathbb{R}^2$ and that $\gamma_1 = [0, 1] \times \{0\}, \gamma_2 = [1, 2] \times \{0\}, \dots, \gamma_n = [n-1, n] \times \{0\}$ on the x -axis. Let L_i ($i = 1, \dots, n$) be the half line $\{i\} \times (-\infty, 0]$. The terminal point of L_i is q_{i+1} . Let $l_i : ([0, 1], \{0, 1\}) \rightarrow (\mathbb{R}^2, q_1)$ ($i = 1, \dots, n$) be a simple closed curve which intersects L_i transversely once from left to right and does not intersect L_j for $j \neq i$ (see Figure 2).

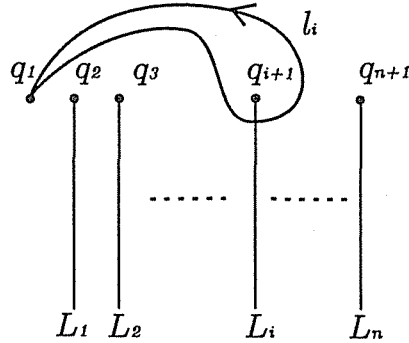


Fig. 2.

For each i ($i = 1, \dots, n$), consider an isotopy $\{h_t^{(i)}\}_{0 \leq t \leq 1}$ of \mathbb{R}^2 whose support is a regular neighborhood of $l_i([0, 1])$ and such that $h_0^{(i)}$ is the identity map and $h_t^{(i)}(q_1) = l_i(t), 0 \leq t \leq 1$.

We denote by h_i ($i = 1, \dots, n$) the homeomorphism of (\mathbb{R}^2, Q_{n+1}) which is the final stage of the isotopy $\{h_t^{(i)}\}_{0 \leq t \leq 1}$; $h_i = h_1^{(i)}$. Note that

$$h_i = \tau[\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1} \dots \gamma_{i-1}^{-1}\gamma_i^2\gamma_{i-1} \dots \gamma_2\gamma_1] \in M_{n+1}(\mathbb{R}^2).$$

Lemma 11 *Each $\alpha \in X_{n+1}(\mathbb{R}^2)$ is equal to an element of the form $\gamma_1 \wedge w$ where w is a word of $\gamma_1, \dots, \gamma_n$.*

Proof. Let α be an element of $X_{n+1}(\mathbb{R}^2)$ whose endpoints are q_i and q_j ($i < j$). Let α' be $\alpha \wedge (\gamma_{i-1}\gamma_{i-2} \dots \gamma_1\gamma_{j-1}\gamma_{j-2} \dots \gamma_2)$. Then endpoints of α' are q_1 and q_2 . Thus we may and will assume without loss of generality that the endpoints of α are q_1 and q_2 .

Suppose that α intersects some of L_1, \dots, L_n transversely. We prove Lemma 11 by induction on the number of the intersection points.

If α does not intersect L_1, \dots, L_n except at the endpoint of L_1 , then it is isotopic to γ_1 . The lemma holds in this case.

If α has intersection points with some of L_1, \dots, L_n other than the endpoint of L_1 , then let L_k be the last half line that α intersects when one traverses α from q_2 to q_1 . Apply h_k (or h_k^{-1}) to α according as α intersects L_k from right to left or left to right at the last intersection. Then $(\alpha)h_k$ (or $(\alpha)h_k^{-1}$) is isotopic to a cord β with fewer intersection points with L_1, \dots, L_n . By induction hypothesis, β is $\gamma_1 \wedge r$ where r is a word of $\gamma_1, \dots, \gamma_n$. Then $\alpha = \gamma_1 \wedge (rs^{-1})$. Here s is the word $\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1} \dots \gamma_{k-1}^{-1}\gamma_k^2\gamma_{k-1} \dots \gamma_2\gamma_1$ (or its inverse), so that $\tau[s]$ is h_k (or h_k^{-1}). ■

Corollary 12 *The rack $X_{n+1}(\mathbb{R}^2)$ is generated by $\gamma_1, \dots, \gamma_n$.*

Corollary 13 *The associated group $As(X_{n+1}(\mathbb{R}^2))$ is generated by $\eta(\gamma_1), \dots, \eta(\gamma_n)$, where $\eta : X_{n+1}(\mathbb{R}^2) \rightarrow As(X_{n+1}(\mathbb{R}^2))$ is the natural map.*

Lemma 14 *The relations (1)–(3) hold in $X_{n+1}(\mathbb{R}^2)$ and the relations (4)–(7) hold in $X_{n+1}(S^2)$.*

Proof. The relations (3) and (6) are checked from Figure 3. The relations (1), (2), (4) and (5) are proved similarly. Two cords illustrated in Figure 4 are isotopic in (S^2, Q_{n+1}) . This implies the relation (7). ■

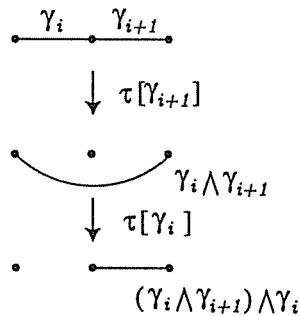


Fig. 3.

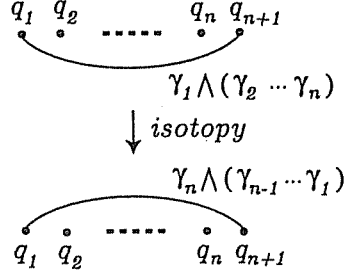


Fig. 4.

By Artin's theorem [1], [2], the $n + 1$ -string braid group B_{n+1} can be identified with the mapping class group $M_{n+1}(D^2)$ of (D^2, Q_{n+1}) with a sufficiently large disk D^2 which contains Q_{n+1} . For a cord α on (\mathbb{R}^2, Q_{n+1}) , we define an $n + 1$ -string braid $\sigma[\alpha]$ to be the braid that is identified with the disk twist $\tau[\alpha]$ in $M_{n+1}(D^2)$ under the identification $B_{n+1} = M_{n+1}(D^2)$. Notice that $\sigma[\gamma_1], \dots, \sigma[\gamma_n]$ are the standard generators, $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, of the braid group B_{n+1} . Artin proved that B_{n+1} has the following group presentation:

(1) Generating set:

$$\sigma_1, \dots, \sigma_n$$

(2) Defining relations:

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i & (|i - j| > 1) \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i &= \sigma_j \sigma_i \sigma_j & (|i - j| = 1). \end{aligned}$$

Proof of Theorem 3. The mapping $\sigma : X_{n+1}(\mathbb{R}^2) \rightarrow B_{n+1}$ satisfies $\sigma[\alpha \wedge \beta] = \sigma[(\alpha)\tau[\beta]] = (\sigma[\beta])^{-1}\sigma[\alpha]\sigma[\beta]$. Thus $\sigma : X_{n+1}(\mathbb{R}^2) \rightarrow (B_{n+1})_{\text{conj}}$ is a rack homomorphism, where $(B_{n+1})_{\text{conj}}$ is the conjugation rack of B_{n+1} (cf. [8]). By universality of the associated group [8], there exists a group homomorphism $\sigma_{\sharp} : As(X_{n+1}(\mathbb{R}^2)) \rightarrow B_{n+1}$ which makes the following diagram commute:

$$\begin{array}{ccc} X_{n+1}(\mathbb{R}^2) & \xrightarrow{\eta} & As(X_{n+1}(\mathbb{R}^2)) \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma_{\sharp} \\ (B_{n+1})_{\text{conj}} & \xrightarrow{\text{id}} & B_{n+1} \end{array}$$

Let $\rho : F(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \rightarrow As(X_{n+1}(\mathbb{R}^2))$ be the group homomorphism defined by

$$\rho(\sigma_i) = \eta(\gamma_i) \quad (i = 1, \dots, n),$$

where $F(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ is the free group generated by $\sigma_1, \dots, \sigma_n$.

If $|i - j| > 1$, then we have

$$\begin{aligned}\rho(\sigma_i^{-1}\sigma_j\sigma_i) &= \eta(\gamma_i)^{-1}\eta(\gamma_j)\eta(\gamma_i) \\ &= \eta(\gamma_j \wedge \gamma_i) \\ &= \eta(\gamma_j) \quad (\text{by Lemma 14}) \\ &= \rho(\sigma_j),\end{aligned}$$

in other words, $\rho(\sigma_i\sigma_j) = \rho(\sigma_j\sigma_i)$.

If $|i - j| = 1$, then we have

$$\begin{aligned}\rho(\sigma_j^{-1}\sigma_i^{-1}\sigma_j\sigma_i\sigma_j) &= \eta(\gamma_j)^{-1}\eta(\gamma_i)^{-1}\eta(\gamma_j)\eta(\gamma_i)\eta(\gamma_j) \\ &= \eta((\gamma_j \wedge \gamma_i) \wedge \gamma_j) \\ &= \eta(\gamma_i) \quad (\text{by Lemma 14}) \\ &= \rho(\sigma_i),\end{aligned}$$

in other words, $\rho(\sigma_i\sigma_j\sigma_i) = \rho(\sigma_j\sigma_i\sigma_j)$. Thus ρ induces a group homomorphism $\rho : B_{n+1} \rightarrow As(X_{n+1}(\mathbb{R}^2))$. This homomorphism is surjective by Corollary 13.

Since $\sigma_{\#}(\rho(\sigma_i)) = \sigma[\gamma_i] = \sigma_i$ for $i = 1, \dots, n$, the composition $\sigma_{\#} \circ \rho$ is the identity map of B_{n+1} . Thus ρ is also injective. ■

4 Presentations of $X_{n+1}(\mathbb{R}^2)$ and $X_{n+1}(S^2)$

By a *rack word* of $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, we mean a word of the form $c_0 \wedge (c_1^{\epsilon_1} \dots c_m^{\epsilon_m})$, where c_i ($i = 0, \dots, m$) is an element from $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ and $\epsilon_i \in \{\pm 1\}$ ($i = 1, \dots, m$).

A word of $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ is called a *positive symmetric word* if it is

$$(s_1^{\epsilon_1} \dots s_m^{\epsilon_m})^{-1} s_0 (s_1^{\epsilon_1} \dots s_m^{\epsilon_m}),$$

where s_i ($i = 0, \dots, m$) is an element from $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ and $\epsilon_i \in \{\pm 1\}$ ($i = 1, \dots, m$).

Rack words of $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ are naturally in one-to-one correspondence to positive symmetric words of $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ by

$$c_0 \wedge (c_1^{\epsilon_1} \dots c_m^{\epsilon_m}) \longleftrightarrow (s_1^{\epsilon_1} \dots s_m^{\epsilon_m})^{-1} s_0 (s_1^{\epsilon_1} \dots s_m^{\epsilon_m})$$

where $\sigma(c_i) = s_i$ for $i = 0, \dots, m$. Notice that

$$\sigma(c_0 \wedge (c_1^{\epsilon_1} \dots c_m^{\epsilon_m})) = (s_1^{\epsilon_1} \dots s_m^{\epsilon_m})^{-1} s_0 (s_1^{\epsilon_1} \dots s_m^{\epsilon_m}).$$

Proof of Theorem 5. By Lemmas 11 and 14, $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ generate $X_{n+1}(\mathbb{R}^2)$ and the relations of the theorem hold. It remains for us to prove that if two rack words w and w' of $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ represent the same element of $X_{n+1}(\mathbb{R}^2)$, then there exists a finite sequence of rack words of $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ between w and w' such that each rack word is obtained from the previous one by a consequence of the relations.

Consider positive symmetric words corresponding to w and w' . Since $\sigma(w) = \sigma(w')$, the positive symmetric words represent the same element of B_{n+1} . By Theorem 1.4 of [13], there exists a finite sequence of positive symmetric words between the two positive symmetric words such that each word is obtained from the previous one by one of the following transformations (T0)–(T3):

(T0)

$$x^{-1}\sigma_k x \longleftrightarrow y^{-1}\sigma_k y$$

where x, y are words of $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ which differ by the trivial relation $\sigma_i \sigma_i^{-1} = \sigma_i^{-1} \sigma_i = 1$, or one of the braid relations $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ ($|i - j| > 1$) and $\sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j$ ($|i - j| = 1$),

(T1)

$$x^{-1}\sigma_i^{-\epsilon}\sigma_i\sigma_i^\epsilon x \longleftrightarrow x^{-1}\sigma_i x$$

where x is a word of $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ and $\epsilon \in \{\pm 1\}$,

(T2)

$$x^{-1}\sigma_j^{-\epsilon}\sigma_i\sigma_j^\epsilon x \longleftrightarrow x^{-1}\sigma_i x$$

where x is a word of $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, $|i - j| > 1$ and $\epsilon \in \{\pm 1\}$,

(T3)

$$x^{-1}\sigma_j^{-\epsilon}\sigma_i\sigma_j^\epsilon x \longleftrightarrow x^{-1}\sigma_i^\epsilon\sigma_j\sigma_i^{-\epsilon} x$$

where x is a word of $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, $|i - j| = 1$ and $\epsilon \in \{\pm 1\}$.

Consider the sequence of rack words of $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ corresponding to the above sequence of the positive symmetric words. This sequence is the desired one, because the transformation (T0) corresponds to the trivial relation of the free group $F(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ generated by $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ or $\gamma_i \gamma_j = \gamma_j \gamma_i$ ($|i - j| > 1$), $\gamma_i \gamma_j \gamma_i = \gamma_j \gamma_i \gamma_j$ ($|i - j| = 1$) in the operator level. This is a consequence of the relations (1)–(3) of Theorem 5. The transformation (T1) corresponds to $\gamma_i \wedge \gamma_i^\epsilon = \gamma_i$, the transformation (T2) corresponds to $\gamma_i \wedge \gamma_j^\epsilon = \gamma_i$ for $|i - j| > 1$, and the transformation (T3) corresponds to $\gamma_i \wedge \gamma_j^\epsilon = \gamma_j \wedge \gamma_i^{-\epsilon}$ for $|i - j| = 1$. These are also consequences of the relations. ■

Let α be a cord on (\mathbb{R}^2, Q_{n+1}) . Consider a sufficiently large simple closed curve c in \mathbb{R}^2 surrounding Q_{n+1} and α . Let β be a simple curve in $\mathbb{R}^2 - Q_{n+1}$ whose endpoints are an interior point of α and a point of c such that β is disjoint from $\alpha \cup c$ except at the endpoints. By surgery along β and c , we have another cord α' on (\mathbb{R}^2, Q_{n+1}) from α . In Figure 5, we illustrate an example where $\alpha = \gamma_1$ and β is a trivial arc. We say that α' is obtained from α by a *flip* along β and c .

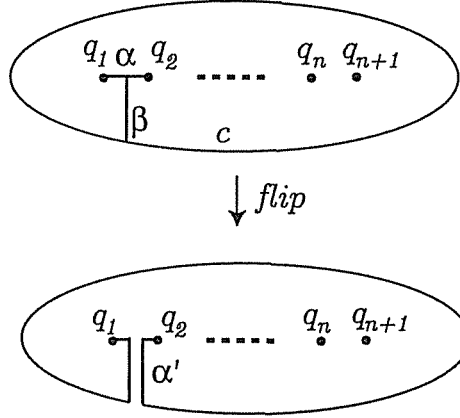


Fig. 5.

Let $\iota : X_{n+1}(\mathbb{R}^2) \rightarrow X_{n+1}(S^2)$ be the rack homomorphism induced by the inclusion map $(\mathbb{R}^2, Q_{n+1}) \rightarrow (S^2, Q_{n+1})$, where we assume that S^2 is the one-point compactification of \mathbb{R}^2 . The element α' of $X_{n+1}(\mathbb{R}^2)$ obtained from α by a flip along β and c depends on β and c , however the image $\iota(\alpha')$ is the same as $\iota(\alpha)$.

We say that two rack words w and w' of $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ are *congruent modulo the relations* (4)–(7) if there exists a finite sequence of rack words of $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ between w and w' such that each rack word is obtained from the previous one by a consequence of the relations (4)–(7).

Proof of Theorem 6. Every cord on (S^2, Q_{n+1}) is isotopic to a cord on (\mathbb{R}^2, Q_{n+1}) . Thus, by Lemma 11, $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ generate $X_{n+1}(S^2)$, where we use the same symbol γ_i for $\gamma_i \in X_{n+1}(\mathbb{R}^2)$ and $\iota(\gamma_i) \in X_{n+1}(S^2)$. By Lemma 14, the relations (4)–(7) hold. It remains for us to prove that if two rack words w and w' of $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ represent the same element of $X_{n+1}(S^2)$, then they are congruent modulo the relations (4)–(7). Let α and α' be cords on (\mathbb{R}^2, Q_{n+1}) corresponding to the rack words w and w' , respectively. Since $\iota(\alpha)$ and $\iota(\alpha')$ are the same element of $X_{n+1}(S^2)$, there exists a finite sequence of cords $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_s$ on (\mathbb{R}^2, Q_{n+1}) such that $\alpha = \alpha_0$, $\alpha' = \alpha_s$ and each α_i is obtained from α_{i-1} by a flip.

Let w_0, w_1, \dots, w_s be a sequence of rack words for $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_s$ with $w_0 = w$ and $w_s = w'$.

We consider a special case that α_{i-1} and α_i are the cords α and α' in Figure 5,

respectively. Then α_{i-1} is represented by the word γ_1 and α_i is represented by the word $\gamma_n \wedge (\gamma_{n-1} \dots \gamma_1 \gamma_n^{-1} \dots \gamma_2^{-1})$. The word $\gamma_n \wedge (\gamma_{n-1} \dots \gamma_1 \gamma_n^{-1} \dots \gamma_2^{-1})$ is obtained from the word γ_1 by a consequence of the relation $\gamma_1 \wedge (\gamma_2 \dots \gamma_n) = \gamma_n \wedge (\gamma_{n-1} \dots \gamma_1)$. Since two rack words representing the same element of $X_{n+1}(\mathbb{R}^2, Q_{n+1})$ are congruent modulo the relations (4)–(6) by Theorem 5, we have that w_{i-1} and w_i are congruent modulo the relations (4)–(7).

Now we consider a general case where α_i is obtained from α_{i-1} by a flip along β and c . There exists an orientation-preserving homeomorphism h of (\mathbb{R}^2, Q_{n+1}) to itself such that $(\alpha_{i-1})h = \gamma_1$ and the images of β and c are as in Figure 5. Let v be an element of $F(X_{n+1}(\mathbb{R}^2))$ such that $\tau(v) = [h]$ where $\tau : F(X_{n+1}(\mathbb{R}^2)) \rightarrow Op(X_{n+1}(\mathbb{R}^2)) = M_{n+1}(\mathbb{R}^2)$ is the natural projection induced by the map $\tau : X_{n+1}(\mathbb{R}^2) \rightarrow M_{n+1}(\mathbb{R}^2)$. Then α_{i-1} is represented by the word $\gamma_1 \wedge (v^{-1})$ and α_i is represented by $(\gamma_n \wedge (\gamma_{n-1} \dots \gamma_1 \gamma_n^{-1} \dots \gamma_2^{-1})) \wedge (v^{-1})$. Since these words are congruent modulo the relation (4)–(7), we see that w_{i-1} and w_i are congruent modulo the relation (4)–(7). \blacksquare

Proof of Theorem 4. If a rack X has a rack presentation with generating set S and the defining relation set R , then the associated group $As(X)$ has a group presentation whose generating set is S and the defining relation set is R in which the rack operator \wedge is interpreted as conjugation, cf. Lemma 4.3 of [8]. Thus by Theorem 6 we have a group presentation of the associated group $As(X_{n+1}(S^2))$ whose generating set is $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ and whose defining relation set is R :

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad (|i - j| > 1) \quad (8)$$

$$\sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j \quad (|i - j| = 1) \quad (9)$$

$$\sigma_n^{-1} \dots \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n = \sigma_1^{-1} \dots \sigma_{n-1}^{-1} \sigma_n \sigma_{n-1} \dots \sigma_1. \quad (10)$$

This is the quotient group of the braid group B_{n+1} divided by the relation (10).

In the braid group B_{n+1} , we have the relation

$$\sigma_1^{-1} \dots \sigma_{n-1}^{-1} \sigma_n \sigma_{n-1} \dots \sigma_1 = \sigma_n \dots \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2^{-1} \dots \sigma_n^{-1}. \quad (11)$$

Using (10) and (11), we have

$$u \sigma_1 = \sigma_1 u, \quad (12)$$

where $u = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1} \sigma_n^2 \sigma_{n-1} \dots \sigma_2 \sigma_1$. Conversely the relations (11) and (12) imply the relation (10). Thus we may replace the relation (10) in the defining relation set R by (12). By considering geometric braids, we see easily that the element u commutes with $\sigma_2, \dots, \sigma_n$ in the braid group B_{n+1} . Thus we may add the relations $u \sigma_i = \sigma_i u$ for $i = 2, \dots, n$ to the set R . \blacksquare

5 Some general results

In this section, we will prove Theorems 7 and 9. Since $X_{n+1}(\Sigma) = X_{n+1}(\text{int}(\Sigma))$ and there is a natural homomorphism $M_{n+1}(\Sigma) \rightarrow M_{n+1}(\text{int}(\Sigma))$, we may assume $\partial\Sigma = \emptyset$ in what follows.

For a cord $\alpha \in X_{n+1}(\Sigma)$, we denote by $\tau^2[\alpha] \in M_{n+1}(\Sigma)$ a “360°-twist” along α . If $\tau[\alpha] = \tau[\beta]$ for $\alpha, \beta \in X_{n+1}(\Sigma)$, then $\tau^2[\alpha] = \tau^2[\beta]$.

Proof of Theorem 7. Let α, β be elements of $X_{n+1}(\Sigma)$ such that $\tau[\alpha] = \tau[\beta]$. The endpoints of α coincide with those of β . There exists a word w of $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ such that the endpoints of $\alpha \wedge w$ (and $\beta \wedge w$) are q_1 and q_2 of Q_{n+1} (Lemma 11). Since $\alpha = \beta$ if and only if $\alpha \wedge w = \beta \wedge w$ and since $\tau[\alpha] = \tau[\beta]$ if and only if $\tau[\alpha \wedge w] = \tau[\beta \wedge w]$, we may assume without loss of generality that the endpoints of α (and β) are q_1 and q_2 .

Let $\alpha \in X_{n+1}(\Sigma)$ be a cord whose endpoints are q_1 and q_2 . We call a disk $D(\alpha)$ in Σ a *tadpole with spine α* if $\alpha \subset D$, $\alpha \cap \partial D = \{q_1\}$ and $Q_{n+1} \cap D = \{q_1, q_2\}$ (see Figure 6). Let $\ell(\alpha)$ be the boundary simple closed curve $\partial D(\alpha)$ in the positive direction based at q_1 .

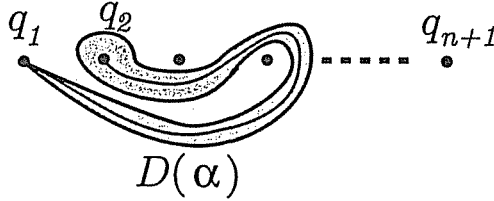


Fig. 6.

Here we make a digression to the braid theory on Σ . Let Q be a finite set of points of Σ , and let $P(\Sigma, Q)$ denote the pure braid group on Σ with “base point” Q . Then we have the *fundamental exact sequence*, where $Q_{n+1} = \{q_1, \dots, q_{n+1}\}$:

$$1 \rightarrow \pi_1(\Sigma - \{q_2, \dots, q_{n+1}\}, q_1) \xrightarrow{j_*} P(\Sigma, Q_{n+1}) \xrightarrow{\pi_*} P(\Sigma, \{q_2, \dots, q_{n+1}\}) \rightarrow 1.$$

Here π_* is the homomorphism obtained by killing the first string (cf. [9]).

For $\Sigma \neq S^2$, the exactness of this sequence is proved in [2] (Thm 1.4). For $\Sigma = S^2$ and $n+1 \geq 4$, the exactness is proved in [7]. Since $P(\Sigma, Q_{n+1}) \subset B_{n+1}(\Sigma)$, we have the following

Lemma 15 *The natural map*

$$j_* : \pi_1(\Sigma - \{q_2, \dots, q_{n+1}\}, q_1) \rightarrow B_{n+1}(\Sigma)$$

is injective for $\Sigma \neq S^2$, or for $\Sigma = S^2, n+1 \geq 4$.

Given a braid $b \in B_{n+1}(\Sigma)$, there exists an isotopy $\{h_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ of Σ onto itself such that $h_0 = \text{id}$ and $\{h_t(Q_{n+1})\}_{0 \leq t \leq 1}$ represents the braid b . (See [1], [2].) A natural map $d_* : B_{n+1}(\Sigma) \rightarrow M_{n+1}(\Sigma)$ is defined as sending b to the mapping class $\in M_{n+1}(\Sigma)$ represented by the final stage h_1 of the isotopy $\{h_t\}_{0 \leq t \leq 1}$, cf. [2](p.153).

Lemma 16

$$\ker d_* \subset \text{Center} B_{n+1}(\Sigma).$$

Proof is essentially the same as that of Lemma 4.2.1 in Birman's book [2].

Lemma 17 *If $\Sigma \neq \mathbb{R}^2, S^2, n+1 \geq 2$, or $\Sigma = \mathbb{R}^2, n+1 \geq 3$, or $\Sigma = S^2, n+1 \geq 4$, then the composition $d_* \circ j_* : \pi_1(\Sigma - \{q_2, \dots, q_{n+1}\}, q_1) \rightarrow M_{n+1}(\Sigma)$ is injective.*

Proof. If $\Sigma \neq \mathbb{R}^2, S^2, n+1 \geq 2$, or $\Sigma = \mathbb{R}^2, n+1 \geq 3$, or $\Sigma = S^2, n+1 \geq 4$, the fundamental group $\pi_1(\Sigma - \{q_2, \dots, q_{n+1}\}, q_1)$ is a free group of rank ≥ 2 . In particular, it is centerless, and

$$j_*(\pi_1(\Sigma - \{q_2, \dots, q_{n+1}\}, q_1)) \cap \text{Center} B_{n+1}(\Sigma) = \{1\}. \quad (13)$$

By Lemma 15, the map $j_* : \pi_1(\Sigma - \{q_2, \dots, q_{n+1}\}, q_1) \rightarrow B_{n+1}$ is injective, and by Lemma 16, $\ker d_* \subset \text{Center} B_{n+1}(\Sigma)$. Hence the injectivity of $d_* \circ j_* : \pi_1(\Sigma - \{q_2, \dots, q_{n+1}\}, q_1) \rightarrow M_{n+1}(\Sigma)$ follows from (13). ■

Now we return to the proof of Theorem 7. Let $D(\alpha)$ be a tadpole with the spine α . Here α is a cord on (Σ, Q_{n+1}) whose endpoints are q_1 and q_2 . It is not difficult to see that $d_* \circ j_* : \pi_1(\Sigma - \{q_2, \dots, q_{n+1}\}, q_1) \rightarrow M_{n+1}(\Sigma)$ sends the boundary loop $\ell(\alpha)$ of $D(\alpha)$ to the 360° -twist $\tau^2[\alpha]$. Suppose we have two cords $\alpha, \beta \in X_{n+1}(\Sigma)$ whose endpoints are q_1 and q_2 . If $\tau[\alpha] = \tau[\beta]$, then $\tau^2[\alpha] = \tau^2[\beta]$. Thus

$$d_* \circ j_*(\ell(\alpha)) = d_* \circ j_*(\ell(\beta)).$$

If $\Sigma \neq \mathbb{R}^2, S^2, n+1 \geq 2$, or $\Sigma = \mathbb{R}^2, n+1 \geq 3$, or $\Sigma = S^2, n+1 \geq 4$, then by Lemma 17, $d_* \circ j_*$ is injective, and we see that $\ell(\alpha)$ and $\ell(\beta)$ represent the same element of $\pi_1(\Sigma - \{q_2, \dots, q_{n+1}\}, q_1)$. Then by Theorem 4.1 of [6], the closed curves $\ell(\alpha)$ and $\ell(\beta)$ are isotopic in $\Sigma - \{q_2, \dots, q_{n+1}\}$ relative to $\{q_1\}$, and hence the tadpoles $D(\alpha)$ and $D(\beta)$ are isotopic in $\Sigma - \{q_3, \dots, q_{n+1}\}$ relative to $\{q_1, q_2\}$. This implies that the cords α and β are isotopic in Σ relative to Q_{n+1} . Thus $\tau : X_{n+1}(\Sigma) \rightarrow M_{n+1}(\Sigma)$ is injective in this generic case.

If $\Sigma = \mathbb{R}^2$ or S^2 , $n + 1 = 2$, then $X_2(\Sigma)$ consists of a single element, and the injectivity of $\tau : X_2(\Sigma) \rightarrow M_2(\Sigma)$ is trivial.

Finally if $\Sigma = S^2$, $n + 1 = 3$, then $X_3(S^2)$ is the dihedral rack R_3 , [8](p.351), and $M_3(S^2)$ is the symmetric group on 3 letters, [9](p.288). The injectivity of $\tau : X_3(S^2) \rightarrow M_3(S^2)$ is proved easily in this special case. ■

The following proposition is a general observation.

Proposition 18 *Let X be an arbitrary rack.*

(1) *If the natural map $\eta : X \rightarrow As(X)$ is injective, then we have*

$$Op(X) \cong As(X)/CenterAs(X).$$

(2) *If the natural map $\xi : X \rightarrow Op(X)$ is injective, then $Op(X)$ is centerless.*

Proof. Suppose that $\eta : X \rightarrow As(X)$ is injective. If a word $w \in F(X)$ represents an element $\eta(w)$ of $CenterAs(X)$, then for any $x \in X$,

$$\eta(x \wedge w) = \eta(w)^{-1} \eta(x) \eta(w) = \eta(x).$$

By the assumption, η is injective, so $x \wedge w = x$ for any $x \in X$. Thus the word w represents the identity of $Op(X)$. This proves that $CenterAs(X)$ is contained in $\ker(As(X) \rightarrow Op(X))$. The opposite inclusion $\ker(As(X) \rightarrow Op(X)) \subset CenterAs(X)$ is proved similarly but without assuming the injectivity of η . Thus

$$\ker(As(X) \rightarrow Op(X)) = CenterAs(X).$$

Since the natural map $As(X) \rightarrow Op(X)$ is surjective, we have the former assertion.

The proof of (2) is similar to the above argument. ■

Proof of Theorem 9. By Corollary 8 to Theorem 7, the natural map $\eta : X_{n+1}(\Sigma) \rightarrow As(X_{n+1}(\Sigma))$ is injective. Then by Proposition 18(1),

$$Op(X_{n+1}(\Sigma)) \cong As(X_{n+1}(\Sigma))/CenterAs(X_{n+1}(\Sigma)),$$

as asserted. ■

6 Proof of Theorem 10

By the remark after the statement of Theorem 4 in Section 1, the kernel of the natural surjection

$$As(X_{n+1}(S^2)) \rightarrow B_{n+1}(S^2) \quad (14)$$

is an infinite cyclic group generated by a central element

$$u = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1} \sigma_n^2 \sigma_{n-1} \dots \sigma_2 \sigma_1.$$

Thus $\text{Center}As(X_{n+1}(S^2))$ certainly contains u .

Let v denote the word $(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n)^{n+1}$. Then under the assumption $n+1 \geq 3$, Artin [1] and Chow [5] show that v generates the center of the $n+1$ -string braid group B_{n+1} , which is an infinite cyclic group. v belongs to $\text{Center}As(X_{n+1}(S^2))$, because $As(X_{n+1}(S^2))$ is a quotient group of B_{n+1} by Theorem 4. Thus we have seen that $\text{Center}As(X_{n+1}(S^2))$ contains u and v .

By Gillette and Van Buskirk [9](p.281), v represents in $B_{n+1}(S^2)$ an element of order 2, called the *Dirac braid*, and the kernel of the natural surjection

$$B_{n+1}(S^2) \rightarrow M_{n+1}(S^2) \quad (15)$$

is generated by the Dirac braid.

Note that, if $n+1 \geq 3$, $M_{n+1}(S^2)$ is isomorphic to $Op(X_{n+1}(S^2))$ by Theorem 2, and it is easy to see that the composite of the homomorphisms (14) and (15) is identified with the natural surjection

$$As(X_{n+1}(S^2)) \rightarrow Op(X_{n+1}(S^2)). \quad (16)$$

Theorem 9 identifies the kernel of (16) as the center of the associated group. Therefore, $\text{Center}As(X_{n+1}(S^2))$ is contained in the subgroup generated by u and v . Combining this with the opposite inclusion, we see that $\text{Center}As(X_{n+1}(S^2))$ coincides with the subgroup generated by u and v .

Next, we will study the relation between the two generators.

In the braid group B_{n+1} , we have the following relation:

$$(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n)^{n+1} = (\sigma_n \sigma_{n-1} \dots \sigma_1)^{n+1}. \quad (17)$$

This relation would be most easily seen by drawing the diagrams of the braids. By the definition of u ,

$$u(\sigma_n \sigma_{n-1} \dots \sigma_1)^{-1} = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n.$$

Since u is a central element of $As(X_{n+1}(S^2))$,

$$u^{n+1}(\sigma_n \sigma_{n-1} \dots \sigma_1)^{-(n+1)} = (\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n)^{n+1}. \quad (18)$$

Combining (18) with (17) and the definition of v , we have the following relation in $As(X_{n+1}(S^2))$:

$$u^{n+1} = v^2. \quad (19)$$

Since u is of infinite order, v is also of infinite order in $As(X_{n+1}(S^2))$. If we move to $B_{n+1}(S^2)$ by imposing $u = 1$, the element v becomes the Dirac braid of order 2. Thus in $As(X_{n+1}(S^2))$, (19) is the only non-trivial relation between u and v . This completes the proof of Theorem 10. ■

Corollary 19 *Suppose $n + 1 \geq 3$. If $n + 1$ is even, $\text{Center}As(X_{n+1}(S^2)) \cong C_\infty \times C_2$. If $n + 1$ is odd, $\text{Center}As(X_{n+1}(S^2)) \cong C_\infty$. Here C_k denotes the cyclic group of order k .*

Proof. If $n + 1$ is even, $u^{-\frac{n+1}{2}}v$ is an element of order 2. The factor C_∞ is generated by u , and the factor C_2 by $u^{-\frac{n+1}{2}}v$. If $n + 1$ is odd, then $(u^{-\frac{n}{2}}v)^2 = u$ and $(u^{-\frac{n}{2}}v)^{n+1} = v$. Thus the infinite cyclic group generated by $u^{-\frac{n}{2}}v$ coincides with $\text{Center}As(X_{n+1}(S^2))$. ■

In concluding we summarize the relationship of $As(X_{n+1}(S^2))$ to the mapping class groups and the braid groups.

- (1) If $n+1 \geq 3$, we obtain the mapping class group $M_{n+1}(S^2)$ from $As(X_{n+1}(S^2))$ by imposing $u = v = 1$.
- (2) If $n + 1 \geq 3$, $M_{n+1}(\mathbb{R}^2)$ and $M_{n+1}(S^2)$ are centerless [9](p.288). We can give a rack theoretic proof of this fact using Theorems 2 and 7, and Proposition 18(2).
- (3) The braid group $B_{n+1}(S^2)$ is obtained from $As(X_{n+1}(S^2))$ by imposing $u = 1$. We already remarked this after Theorem 4.
- (4) If $n + 1$ is even, we can take a double branched covering of S^2 with branch points Q_{n+1} . The covering space is an oriented closed surface Σ_g with genus $g = \frac{n-1}{2}$. Let $M_{\text{sym}}(\Sigma_g)$ denote the “symmetric” subgroup of the mapping class group $M(\Sigma_g)$ consisting of those elements which commute with the covering transformation. Then for $n + 1 \geq 6$, $M_{\text{sym}}(\Sigma_g)$ is obtained from $As(X_{n+1}(S^2))$ by imposing $u^2 = 1, v = 1$. See [3](p.110).

References

- [1] E. Artin, Theory of braids, *Ann. of Math.* 48 (1947) 101–126.
- [2] J. S. Birman, *Braids, links, and mapping class groups.* (Ann. Math. Studies 82, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1974).
- [3] J. S. Birman and H. M. Hilden, On the mapping class groups of closed surfaces as covering spaces, in: *Advances in the theory of Riemann surfaces* (Ann. Math. Studies 66, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1971) 81–115.
- [4] E. Brieskorn, Automorphic sets and braids and singularities, *Contemp. Math.* 78 (1988) 45–115.
- [5] W.-L. Chow, On the algebraic braid group, *Ann. of Math.* 49 (1948) 654–658.
- [6] D. B. A. Epstein, Curves on 2-manifolds and isotopies, *Acta Math.* 115 (1966) 83–107.
- [7] E. Fadell and J. Van Buskirk, The braid groups of E^2 and S^2 , *Duke Math. J.* 29 (1962) 243–258.
- [8] R. Fenn and C. Rourke, Racks and links in codimension two, *J. Knot Theory Ramifications* 1 (1992) 343–406.
- [9] R. Gillette and J. Van Buskirk, The word problem and consequences for the braid groups and mapping class groups of the 2-sphere, *Trans. Amer. Math. Soc.* 131 (1968) 277–296.
- [10] K. Habiro, S. Kamada, Y. Matsumoto and K. Yoshikawa, in preparation.
- [11] D. Joyce, A classifying invariant of knots; the knot quandle, *J. Pure and Applied Algebra* 23 (1982) 37–65.
- [12] S. Kamada, On braid monodromies of non-simple braided surfaces, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 120 (1996) 237–245.
- [13] S. Kamada, An observation of surface braids via chart description, *J. Knot Theory Ramifications* 4 (1996) 517–529.
- [14] L. H. Kauffman, *Knots and Physics* (Series on Knots and Everything, 1, World Scientific Publ., 1991).
- [15] Y. Matsumoto, Lefschetz fibrations of genus two—A topological approach—, in: S. Kojima *et al*, eds., *Proc. the 37-th Taniguchi Sympo.* (World Scientific Publ., 1996) 123–148.
- [16] Y. Matsumoto, On quantum inverse in a free group, in: *The fifth Korea-Japan School of Knots and Links* (Proc. Applied Math. Workshop, 8, KAIST, (Taejon, Korea 1997), 1998), 187–198.
- [17] S. V. Matveev, Distributive groupoids in knot theory, *Math. USSR-Sbornik* 47 (1982) 73–83.

- [18] M. Takasaki, Abstraction of symmetric transformations (in Japanese), *Tohoku Math. J.* **49** (1942/43), 145–207; Math. Rev. 9. p.8.
- [19] P. Dehornoy, Braid groups and left distributive operations, *Trans. Amer. Math. Soc.* **345** (1994) 115–150.

トーラス上のアフィン構造とサークルパッキング

東工大 情報理工 水嶋 滋

平面あるいは曲面上に、つぎの条件を満たすようにいくつかの閉円板を配置したものをサークルパッキングという。(1) 任意の異なる2つの円板は外接するかあるいは共有点をもたない。曲面の場合、1つの閉円板が自分自身と接することを許す。(2) 閉円板の和集合の補空間は互いに連結ではない複数の三角形形状の領域からなる。

\mathbb{C} 上の変換 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ で $f(z) = az + b$ ($a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0$) という形で表されるものを複素アフィン変換という。複素平面上のいくつかの開集合を複素アフィン変換により貼り合わせてえられるトーラスのことをアフィントーラスという。また、貼り合わせに用いる変換が、とくに $f(z) = az + b$ ($a, b \in \mathbb{C}, |a| = 1$) という形で表される場合、このトーラスのことをフラットトーラスという。

アフィントーラスに対して、自然な計量を定義することはできないが、複素アフィン変換が相似変換であり形状を保つということから、アフィントーラスにおいても円を定義することができ、サークルパッキングを考えることができる。

フラットトーラス全体の中でサークルパッキングを許容するものの分布について、次の定理が知られている。

定理 (Thurston) フラットトーラス全体の中で、サークルパッキングを許容するものは稠密かつ可算。

今回、1つの円からなるもっとも単純なパッキングタイプのサークルパッキングを許容するアフィントーラスの広がり調べて、それをもとに次の結果を得た。

定理 任意のフラットトーラスに対して、それと等角同値なアフィントーラスで、円によるパッキングを許容するものが存在する。

Casson-Walker 不変量と曲面の写像類群

森山 哲裕*

京都大学大学院理学研究科

森田茂之先生は、向き付けられた整係数ホモロジー 3 次元球面の位相不変量である Casson 不変量と曲面の写像類群の部分群とのある関係を Johnson 準同型と曲面の 2 次特性類を用いて示されました ([M1][M2])。この講演ではこれらの結果が有理係数ホモロジー 3 次元球面の位相不変量である Casson-Walker 不変量の場合にまで拡張できることを述べます ([Mo])。

1 Introduction

固定された円板 D^2 を持つ向き付けられた種数 g の閉曲面を Σ とし、 $H = H_1(\Sigma; \mathbb{Z})$ とする。そして Σ の D^2 を固定した写像類群を Γ とする。また、 $\Sigma \setminus D^2$ 上の分離単純閉曲線に沿った Dehn twist により生成される Γ の部分群を \mathcal{K} とする。

向き付けられた有理係数ホモロジー 3 次元球面 M への埋め込み $f: \Sigma \rightarrow M$ があるとき、 Γ の元 φ で $f(\Sigma)$ を捻ることにより新しい 3 次元多様体 M_φ が得られる。特に φ が Σ の Torelli 群 $\mathcal{T} = \text{Ker}(\Gamma \rightarrow \text{Sp}(H))$ の元ならば、 M と M_φ のホモロジー群は自然に同型になる。そこで写像

$$\lambda_f: \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{Q}$$

を $\lambda_f(\varphi) = \lambda(M_\varphi) - \lambda(M)$ と定義する。 λ は Casson-Walker 不変量である。Dehn surgery formula ([W]) によると λ_f は次式を満たす。 $\varphi \in \mathcal{T}, \psi \in \mathcal{K}$ とすると、

$$\lambda_f(\varphi\psi) = \lambda_f(\psi\varphi) = \lambda_f(\varphi) + \lambda_f(\psi).$$

*e-mail: moriyama@kurims.kyoto-u.ac.jp

特に λ_f は \mathcal{K} 上準同型である。

Torelli 群 \mathcal{T} あるいはその部分群 \mathcal{K} と Casson-Walker 不変量との関係を、この写像 λ_f を経由して考察する。定理 1 は λ_f の \mathcal{K} への制限を別の 2 つの準同型の和で表したものであり、定理 2 は λ_f の \mathcal{T} 上での準同型からのズレを表示したものである。これらはいずれも整係数ホモロジー球面の場合の結果 [M1][M2] の有理係数ホモロジー球面への拡張である。証明 (のあらずじ) は section 3 以降にある。

2 結果

まず定理 1 を述べる準備をする。 \mathcal{L}_3 を \mathbf{Z} 上 H の元により生成される自由代数の次数 3 の斉次元全体のつくる部分加群とする。そして $\tau_3 : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}_3 \otimes H$ を Johnson 準同型 ([M1])、 $d : \mathcal{K} \rightarrow \mathbf{Z}$ を [M1][M3] で定義される Γ の 2 次特性類とする。また、埋め込み f に対して $f(\Sigma) \subset M$ の Seifert form $l_f : H \otimes H \rightarrow \mathbf{Q}$ が定義される。 $z \in H_1(f(\Sigma); \mathbf{Z})$ を代表する $f(\Sigma)$ 上の単純閉曲線を正の法方向に押し上げたものを z^+ と書く時、 $l_f(x, y) = lk(f_*(x), f_*(y)^+)$ である。行列式を使って、双線形写像 l_f を $\Lambda^k H \otimes \Lambda^k H \rightarrow \mathbf{Q}$ に拡張できる。このとき次の定理が成り立つ。右辺の式 (の $1/2$ 倍) は森田先生が構成されたものであり、証明も [M1] と同様に \mathcal{K} の生成元について両辺を比較することにより得られる。

Theorem 1 ([M1] for integral homology 3-spheres) $f : \Sigma \rightarrow M$ を向き付けられた有理係数ホモロジー 3 次元球面 M への埋め込みとする。このとき次式が成立する。

$$\lambda_f = 2l_f \circ \tau_3 + \frac{1}{12}d : \mathcal{K} \rightarrow \mathbf{Q}$$

定理の右辺第 1 項目について説明する。以下のように $\text{Im} \tau_3 \subset \Lambda^2 H \otimes \Lambda^2 H \otimes \mathbf{Q}$ と見られるために、 τ_3 に $l_f : \Lambda^2 H \otimes \Lambda^2 H \otimes \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}$ を合成することができる。対応 $[[u_1, u_2], u_3] \mapsto (u_1 \wedge u_2) \otimes u_3 - (1/3) \sum_{i=1}^3 ((u_{i+1} \wedge u_{i+2}) \otimes u_{i+3})$ により $\mathcal{L}_3 \subset \Lambda^2 H \otimes H \otimes \mathbf{Q}$ と思える (和の部分の u の添字は mod 3 で考える)。さらに H を自明に tensor して、 $\mathcal{L}_3 \otimes H \subset \Lambda^2 H \otimes H \otimes H \otimes \mathbf{Q}$ を得る。そして \mathcal{K} の生成元について τ_3 の像を計算することにより、実際に $\text{Im} \tau_3$ が $\Lambda^2 H \otimes \Lambda^2 H \otimes \mathbf{Q}$ に含まれていることが分かる (Section 4)。

次の定理を述べる前に命題 2 を考える。 M が整係数ホモロジー球面
のとき、種数の十分大きな Heegaard 分解 $f: \Sigma \rightarrow S^3$ をとれば、ある
 $\psi \in \mathcal{K}$ によって $M \cong S^3_\psi$ と表せる ([M1])。また、 $f: \Sigma \rightarrow M$ を固定し
て考えるなら、任意の \mathcal{T} の元 φ に対して、ある \mathcal{K} の元 ψ が存在して
 $M_\varphi \cong M_\psi$ となる。命題 2 は、一般の 3 次元多様体ではどうなるのかを
述べたものである。

$f: \Sigma \rightarrow M$ を任意の向き付けられた 3 次元閉多様体 M への埋め込み
で、埋め込まれた曲面 $f(\Sigma)$ が M を 2 つの連結成分 V_+, V_- に分けるよ
うなものとする。ここで M_+ は、 M の部分多様体としての向きから定ま
る境界の向きと、 f を経由して Σ から導かれる向きとが一致する方の成
分とする。このとき \mathcal{T} の部分群 \mathcal{T}' を次のように定義する。

$$\mathcal{T}' = \left\{ \varphi_- \varphi_0 \varphi_+ \mid \begin{array}{l} \varphi_\pm \in \mathcal{T} \text{ は } M_\pm \text{ 上の微分同相写像に拡張できる。} \\ \varphi_0 \in \mathcal{K} \end{array} \right\}$$

Johnson 準同型 $\tau_2: \mathcal{T} \rightarrow \Lambda^3 H$ の完全系列 ([J1] [J2])

$$1 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{T} \xrightarrow{\tau_2} \Lambda^3 H \rightarrow 0$$

により、 \mathcal{T}' は \mathcal{T} の正規部分群で、商 $R_f = \mathcal{T}/\mathcal{T}'$ は $\Lambda^3 H$ の商群になる。
 $r_f: \mathcal{T} \rightarrow R_f$ を商写像とする。

Proposition 2 $f: \Sigma \rightarrow M$ を向き付けられた 3 次元多様体への埋め込
みとし、 $r_f: \mathcal{T} \rightarrow R_f$ を上で定義した準同型とする。

- (i) $r_f(\varphi) = 0$ ならば、ある $\psi \in \mathcal{K}$ が存在して、 M_φ と M_ψ は微分同相
になる。
- (ii) f が Heegaard 埋め込みであると仮定する。すると準同型 $f_*: \Lambda^3 H \rightarrow$
 $\Lambda^3 H_1(M; \mathbb{Z})$ から導かれる準同型 $R_f \rightarrow \Lambda^3 H_1(M; \mathbb{Z})$ は同型写像である。

$$R_f \cong \Lambda^3 H_1(M; \mathbb{Z}).$$

- (iii) f が Heegaard 埋め込みで $H_1(M; \mathbb{Z})$ が高々 2 つの巡回群の直和に同
型ならば、任意の $\varphi \in \mathcal{T}$ に対してある $\psi \in \mathcal{K}$ が存在して、 M_φ と M_ψ
は微分同相になる。

R_f は M_φ ($\varphi \in \mathcal{T}$) が \mathcal{K} の元で表されるための 1 つの障害群である
と見なすことができる。 f を固定しなければ、次のことが知られている。
2 つの向き付けられた 3 次元多様体の整係数 1 次元ホモロジー群が同型

で、さらにその同型写像がその torsion 部分群上の linking form と $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ 係数 1 次元コホモロジー群上の 3 重 cup 積の同型を導くならば、種数の十分大きな Heegaard 分解を適当にとれば、 \mathcal{K} の元で移り合える。

次に定理 3 を述べる。 $\tau_2: \mathcal{T} \rightarrow \Lambda^3 H$ を Johnson 準同型とする。Dehn surgery formula から、 λ_f の準同型からの差 $\lambda_f(\varphi\psi) - \lambda_f(\varphi) - \lambda_f(\psi)$ は φ, ψ の τ_2 の像にしか寄らないことが分かるが、具体的には次のようになる。

Theorem 3 ([M2] for integral homology 3-spheres) M を向き付けられた有理係数ホモロジー 3 次元球面、 $f: \Sigma \rightarrow M$ を Heegaard 埋め込みとする。 $\varphi, \psi \in \mathcal{T}$ に対し、 $r_f(\varphi) = 0$ または $r_f(\psi) = 0$ のどちら一方が成り立てば、

$$\lambda_f(\varphi\psi) = \lambda_f(\varphi) + \lambda_f(\psi) - 4l_f(\tau_2(\psi), \tau_2(\varphi)).$$

$H_1(M; \mathbf{Z})$ が高々 2 つの有限巡回群の直和に同型ならば、命題 2 (iii) により定理 3 の等式は Torelli 群 \mathcal{T} 全体で成り立つことが分かる。

定理 3 は、上の仮定が成り立つならば上式の計算が $\lambda_f([\varphi, \psi])$ の計算に帰着でき、これを定理 1 によって計算することにより示される。

3 定理 1 の証明

証明は [M1] と同じである。ここではそのあらすじを述べる。

定理 1 の両辺は共に \mathcal{K} 上の準同型であるから、 \mathcal{K} の生成元について両者が等しくなることを示せば十分である。 $\varphi \in \mathcal{K}$ を $\Sigma \setminus D^2$ 上の分離単純閉曲線 γ に沿った Dehn twist であるとする。仮定により、 M の knot $K = f(\gamma)$ は null homologous であり、特にその Seifert surface を $f(\Sigma)$ 上に自然にとれる。そして $u_i, v_i \in H (i = 1, \dots, h)$ を H の subbasis で、 $f_*(u_i), f_*(v_i) \in H_1(f(\Sigma); \mathbf{Z})$ がその Seifert surface の symplectic basis になるようにとる。この basis は $u_i \cdot u_j = v_i \cdot v_j = 0, u_i \cdot v_j = \delta_{ij}$ を満たす。このとき、 M_φ は knot K に沿って -1 Dehn surgery を施して得られる多様体に等しい。このような knot に対する Casson-Walker 不変量の Dehn surgery formula は、

$$\lambda(M_\varphi) = \lambda(M) - \frac{d^2}{dt^2} \Delta_K(1)$$

である。ここで $\Delta_K(t)$ は K の正規化された Alexander 多項式である。
右辺第 2 項目は計算されていて ($[M1][W]$)、

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}\Delta_K(1) &= 2\sum_{i=1}^h (l_f(u_i, u_i)l_f(v_i, v_i) - l_f(u_i, v_i)l_f(v_i, u_i)) \\ &\quad + 4\sum_{1\leq i<j\leq h} (l_f(u_i, u_j)l_f(u_i, u_j) - l_f(u_i, v_j)l_f(v_i, u_j)) \\ &= 2l_f(\omega, \omega).\end{aligned}$$

ここで $\omega = \sum_{i=1}^h u_i \wedge v_i \in \Lambda^2 H$ 。したがって、

$$\lambda_f(\varphi) = -2l_f(\omega, \omega)$$

を得る。

次に $l_f(\tau_3(\varphi))$ を求める。 $[M1]$ より

$$\begin{aligned}\tau_3(\varphi) &= -\sum_{i=1}^h ([u_i, u_j], v_i] \otimes v_i - [[u_i, u_j], u_i] \otimes u_i) \\ &\quad - \sum_{1\leq i<j\leq h} ([u_i, u_j], v_i] \otimes v_j - [[u_i, u_j], v_j] \otimes v_i \\ &\quad + [[v_i, v_j], u_i] \otimes u_j - [[v_i, v_j], u_j] \otimes u_i) \in \mathcal{L}_3 \otimes H.\end{aligned}$$

右辺に $\mathcal{L}_3 \otimes H \rightarrow \Lambda^2 H \otimes H \otimes H \otimes \mathbf{Q}$ を作用させると、

$$\begin{aligned}\tau_3(\varphi) &= -\left(\sum_{i=1}^h u_i \wedge v_i\right)^{\otimes 2} \\ &\quad + \frac{1}{3}\sum_{1\leq i<j\leq h} (u_i \wedge v_i \leftrightarrow u_j \wedge v_j + v_i \wedge u_j \leftrightarrow u_i \wedge v_j \\ &\quad + u_j \wedge u_i \leftrightarrow v_i \wedge v_j) \in \Lambda^2 H \otimes \Lambda^2 H \otimes \mathbf{Q}\end{aligned}$$

となる。ここで $a \leftrightarrow b = a \wedge b + b \wedge a$ である。だから $\tau_3(\varphi)$ に l_f を作用させると、

$$l_f(\tau_3(\varphi)) = -l_f(\omega, \omega) - \frac{1}{6}h(h-1)$$

となる。右辺第 1 項目は $\lambda_f(\varphi)$ の $1/2$ 倍に等しく、また、第 2 項目は $d(\varphi) = 4h(h-1)$ の $1/24$ 倍に等しい ($[M1][M3]$)。よって定理 1 を得る。

4 命題 2 の証明

(i) は T' の定義から、そして (iii) は (ii) から明らかである。

(ii) を示す。仮定により V_+, V_- は handle 体である。 $\iota: \partial V_+ \rightarrow \partial V_-$ を「恒等写像」とする ($M = V_+ \cup_\iota V_-$)。簡単のため、同一視 $\partial V_+ = \Sigma$ と $V_+ \cong V_-$ をあらかじめ与えておく。また、 Σ の Torelli 群 \mathcal{T} の 2 つの部分群 \mathcal{T}_\pm を

$$\mathcal{T}_\pm = \{\psi \in \mathcal{T} \mid \psi \text{ は } V_\pm \text{ の微分同相写像に拡張する.}\}$$

と定義する。

$\mathcal{T}_- = \iota^{-1} \mathcal{T}_+ \iota$ だから、 $\tau_2(\mathcal{T}_-) = \iota_*^{-1}(\tau_2(\mathcal{T}_+))$ が成り立つ。そして

$$\tau_2(T') = \tau_2(\mathcal{T}_-) + \tau_2(\mathcal{T}_+) = \iota_*^{-1}(\tau_2(\mathcal{T}_+)) + \tau_2(\mathcal{T}_+)$$

だから、準同型定理により

$$R_f \cong \Lambda^3 H / (\iota_*^{-1}(\tau_2(\mathcal{T}_+)) + \tau_2(\mathcal{T}_+))$$

となる。さらに R_f を計算するために次の補題を用いる。

Lemma 4 ([M1]) $x_1, \dots, x_g, y_1, \dots, y_g \in H$ を Σ の *symplectic basis* で、 y_i が V_+ で *null homologous* となっているものとする。すると $\tau_2(\mathcal{T}_+)$ は、 $x_i \wedge x_j \wedge y_k, x_i \wedge y_j \wedge y_k, y_i \wedge y_j \wedge y_k$ なる形のもので生成される $\Lambda^3 H$ の部分群である。

写像 $\iota^{-1}: \Sigma \rightarrow V_+$ から導かれる準同型 $H \rightarrow H_1(V_+; \mathbf{Z})$ による y_i の像を $Y_i(x_1, \dots, x_g)$ と書くとき、補題と上の同型を用いて R_f を求めると

$$R_f \cong \left\langle \begin{array}{c|c} x_i \wedge x_j \wedge x_k & x_{\sigma_i} \wedge x_{\sigma_j} \wedge x_{\sigma_k} = \text{sgn} \sigma \, x_i \wedge x_j \wedge x_k \\ (1 \leq i, j, k \leq g) & x_i \wedge x_j \wedge Y_k(x_1, \dots, x_g) = 0 \end{array} \right\rangle$$

なる加群の表示を得る。この表示は $\Lambda^3 H_1(M; \mathbf{Z})$ に同型である。よって (ii) は示された。

5 定理 3 の証明

$\varphi = \varphi_- \varphi_0 \varphi_+ \in T'$, ($\varphi_\pm \in \mathcal{T}_\pm, \varphi_0 \in \mathcal{K}$) と仮定する。 $M_\varphi \cong M_{\varphi_0}$ だから

$$\lambda_f(\varphi) = \lambda_f(\varphi_0)$$

である。また、 $\varphi\psi = \varphi_-\varphi_0[\varphi_+, \psi]\psi\varphi_+$ だから、 $M_{\varphi\psi} \cong M_{\varphi_0[\varphi_+, \psi]\psi}$ である。よって、

$$\begin{aligned}\lambda_f(\varphi\psi) &= \lambda_f(\varphi_0) + \lambda_f(\psi) + \lambda_f([\varphi_+, \psi]) \\ &= \lambda_f(\varphi) + \lambda_f(\psi) + \lambda_f([\varphi_+, \psi])\end{aligned}$$

となる。あとは [M2] と同様にして証明できる。[M2] によると

$$\lambda_f([\varphi_+, \psi]) = 4(l_f(\tau_2(\varphi_+), \tau_2(\psi)) - l_f(\tau_2(\psi), \tau_2(\varphi_+))).$$

この等式は、 $\tau_3([\varphi_+, \psi], d([\varphi_+, \psi])$ から定理 1 を用いて示されるもので、 M が有理係数ホモロジー球面の場合でも正しい。

前の補題により、 $\tau_2(\varphi_+)$ は $*\wedge*\wedge y_i$ なる形の元の一次結合であり、また一般に $l_f(y_i, *) = 0$ だから、 $l_f(\tau_2(\varphi_+), \tau_2(\psi)) = 0$ である。よって

$$\lambda_f(\varphi\psi) = \lambda_f(\varphi) + \lambda_f(\psi) - 4l_f(\tau_2(\psi), \tau_2(\varphi_+))$$

となる。

一方、 $\tau_2(\varphi_-)$ は $*\wedge*\wedge x_i$ なる形の元の一次結合で、一般に $l_f(*, x_i) = 0$ だから、

$$l_f(\tau_2(\psi), \tau_2(\varphi_+)) = 0$$

である。つまり、

$$\begin{aligned}l_f(\tau_2(\psi), \tau_2(\varphi)) &= l_f(\tau_2(\psi), \tau_2(\varphi_+)) + l_f(\tau_2(\psi), \tau_2(\varphi_-)) \\ &= l_f(\tau_2(\psi), \tau_2(\varphi_+)).\end{aligned}$$

よって

$$\lambda_f(\varphi\psi) = \lambda_f(\varphi) + \lambda_f(\psi) - 4l_f(\tau_2(\psi), \tau_2(\varphi))$$

を得る。証明終り。

参考文献

- [A] M.F.Atiyah, On framings of 3-manifolds, Topology **29** (1990) 1-7.
- [J1] D.Johnson, An abelian quotient of the mapping class group \mathcal{I}_g , Math. Ann. **249**(1980), 225-242.

- [J2] D.Johnson, The structure of the Torelli group II and III, *Topology* **24**(1985), 113-144.
- [M1] S.Morita, Casson's invariant for homology 3-spheres and characteristic classes of surfaces bundles I, *Topology* **28** (1989), 305-323
- [M2] S.Morita, On the structure of the Torelli group and the Casson invariant, *Topology*, **30** (1991), 603-621.
- [M3] S.Morita, Casson invariant, signature defect of framed manifolds and the secondary characteristic classes of surface bundles,
- [Mo] T.Moriyama, Casson-Walker invariant, mapping class group of surfaces and framings of 3-manifolds, preprint.
- [W] K.Walker, *An Extension of Casson's Invariant*, Princeton University Press, 1992.